Vektorműveletek a koordináta-rendszerben

Vektorműveletek a koordináta-rendszerben

Elméleti anyag:

**A vektor fogalma (egyszerű meghatározás): az irányított szakaszokat nevezzük vektoroknak. Egy vektornak van nagysága (hossza) és iránya (régebbi megfogalmazás szerint állása és iránya…)**

**Két vektort akkor tekintünk egyenlőnek, ha**

**- ugyanolyan hosszúak és ugyanolyan irányúak (i);**

**- ugyanazt az eltolást határozzák meg (ii).**

**Megmutatható, hogy az (i) és (ii) meghatározások egyenértékűek.**

**Nullvektor: nulla hosszúságú, TETSZŐLEGES IRÁNYÚ vektor.**

**Egységvektor: egységnyi (azaz 1) hosszúságú vektor.**

**Helyvektor: origó kezdőpontú vektor. Az OA vektort általában a-ral jelöljük.**

**Szabad vektor: tetszőleges, nem feltétlenül origó kezdőpontú vektor. Jele: AB nyíllal a tetején.**

**Egységvektorok: i-nak nevezzük a koordináta-rendszerben az x tengely pozitív irányába mutató egységvektort.**

**j-nak nevezzük a koordináta-rendszerben az y irányú egységvektort.**

**(Három dimenziós koordináta-rendszerben k-ral jelöljük a z tengely irányába mutató egységvektort.**

**α-szögű egységvektornak nevezzük a koordináta-rendszerben azt az egységvektort, amely i-ral α előjeles szöget zár be.**

**A szög előjele: óramutató járásával ellentétes irányban pozitív, az óramutató járásával megegyező irányban negatív.**

**Vektorműveletek:**

**I. Két vektor összege az a harmadik vektor, amit úgy kapunk, hogy az első vektor végpontjából indítjuk a második vektort; az összegvektor ezen az ábrán az első vektor kezdőpontjából a második vektor végpontjába mutat.**

**Másképpen: minden vektor meghatároz egy párhuzamos eltolást mint transzformációt. Két vektor összegét úgy foghatjuk fel, mint az egyes vektorok által meghatározott eltolások egymásutánját meghatározó újabb vektort.**

**A fenti két meghatározás egyenértékű.**

**A vektorösszeadás művelete felcserélhető, azaz a+b = b+a.**

**A vektorösszeadás műveletében a tagok csoportosíthatók: (a + b) + c = a + (b + c).**

**A vektorösszeadás neutrális eleme a nullvektor, azaz a + 0 = a, minden a vektorra.**

**Minden vektornak létezik ellentettje, azaz bármely a-hoz létezik olyan b, hogy a + b = 0. (Ez a b = -a.)**

**II. Két vektor különbsége: az a – b különbségén azt a vektort értjük, amelyhez b-t adva a-t kapjuk.**

**Másképp: az a – b különbségen az a + (–b) összeget értjük.**

**Az imént közölt két meghatározás is egyenértékű.**

**a – b szerkesztése: ábrát készítünk, melyen az a és b vektoroknak közös a kezdőpontjuk. Az a – b különbségvektor a b végpontjából az a végpontjába mutat. (És ekkor látható, hogy b + (a – b) = a. )**

**III. Vektor szorzása számmal: Egy a vektor λ számszorosán azt a vektort értjük, melynek iránya pozitív λ esetén a irányával megegyezik, negatív λ esetén pedig azzal ellentétes, nagysága pedig |λ| ∙ |a|. Egy tetszőleges vektor 0-szorosa pedig a nullvektor.**

**IV. Két vektor skaláris szorzata: Az a és b vektorok skaláris szorzatán egy valós számot értünk, melyet úgy számíthatunk ki, hogy a két vektor hosszát összeszorozzuk, majd megszorozzuk bezárt szögük koszinuszával.**

**Jel: a ∙ b, kiszámítás: a ∙ b = |a| ∙ |b| ∙ cosγ.**

**A skaláris szorzatot úgy is megkaphatjuk, hogy az egyik vektor hosszát megszorozzuk a másik vektornak az első vektor irányába eső merőleges vetületének előjeles hosszával.**

**A skaláris szorzat a definícióból adódóan felcserélhető művelet. Nem asszociatív, mert az (a∙b)∙c szorzat eredménye egy c irányú, az a∙(b∙c) szorzat eredménye pedig egy a irányú vektor, tehát általában nem lehetnek egyenlők.**

**A skaláris szorzat az összeadásra nézve disztributív, azaz az összeget tagonként lehet szorozni, akárcsak a valós számok halmazán. (Bizonyítás csak emelt szinten.) Ez azt jelenti, hogy a∙(b + c) = a∙b + a∙c.**

**Vektor felbontása összetevőkre: Minden síkbeli vektor egyértelműen bontható fel x és y irányú vektorok összegére. Tehát minden (x; y) síkbeli a vektorhoz egyértelműen léteznek az a1 és a2 valós számok úgy, hogy a1i + a2j = a.**

**Minden térbeli vektor is egyértelműen bontható fel x, y és z irányú vektorok összegére. Tehát minden térbeli b vektorhoz egyértelműen léteznek b1, b2, b3 valós számok úgy, hogy b1i + b2j + b3k = b.**

**Ezt a tételt középiskolában nem bizonyítjuk, viszont használjuk a vektor koordinátáinak meghatározásánál.**

**Vektor koordinátái: Az előző tétel szerint minden (x; y) síkbeli a vektorhoz egyértelműen léteznek az a1, a2 valós számok úgy, hogy a1i + a2j = a. Az a1-et az a vektor első, az a2-t pedig az a vektor második koordinátájának (vagy: összetevőjének) nevezzük. Egy síkbeli vektor két koordinátáját általában rendezett számpár alakjában adjuk meg: a(a1; a2).**

**Megjegyzés: térben pedig természetszerűleg három koordinátája van minden vektornak.**

**Műveletek és koordináták**

**Az összeadás, kivonás, számmal való szorzás műveletei a vektorokról öröklődnek a koordinátáikra (összetevőikre) is.**

**Összegvektor koordinátáit megkaphatjuk úgy, hogy az összeadandó vektorok megfelelő koordinátáit összeadjuk.**

**Különbségvektor minden koordinátája megegyezik az egyes vektorok megfelelő koordinátáinak különbségével.**

**Vektor számszorosának koordinátáit megkapjuk, ha az egyes összetevőknek külön-külön vesszük a számszorosát.**

**A skalár szorzás nem öröklődik a koordinátákra, hanem a következő szabály szerint végezhető el:**

**Két vektor skalár szorzatát megkapjuk, ha első koordinátáik szorzatához hozzáadjuk második koordinátáik szorzatát (térben pedig még ezekhez a harmadik összetevők szorzatát is).**

**Ha a(a1; a2) és b(b1; b2), akkor a∙b = a1b1 + a2b2.**

**Vektor hosszának kiszámítása koordinátáinak ismeretében: Maga a vektor, az ő vízszintes vetülete és az ő függőleges vetülete mindig olyan derékszögű háromszöget határoz meg, melyben az eredeti vektor az átfogó. Pitagorasz tételét alkalmazva megkaphatjuk a hosszát a vetületei hosszának (azaz koordinátái abszolút értékének) ismeretében. Ha v(v1; v2), akkor v hossza (jel: |v|) megkapható Pitagorasz tételéből: |v|2 = v12 + v22, azaz |v| = √( v12 + v22). Az összetevőknek nem szükséges abszolút értékét venni, mivel a négyzetre emeléskor így is, úgy is ugyanazt az értéket kapjuk.**

**Két vektor hajlásszögének kiszámítása a skalár szorzat kétféle felírásából:** A **v(v1; v2) és az u(u1; u2) vektorok hajlásszögének kiszámításához írjuk fel a skalár szorzatot kétféle módon. Egyrészt: sksz = v1u1 + v2u2, másrészt sksz = |v|∙|u|∙cosφ. Átrendezve: cosφ = (v1u1 + v2u2) / (|v|∙|u|), ahol a vektorok hosszát a koordináták négyzetösszegéből kapjuk (négyzetgyökvonással).**

**Két vektor párhuzamosságának feltétele: az egyik a másiknak számszorosa legyen, másképpen szólva a megfelelő koordinátáik egyenes arányosságban legyenek egymással. A v(v1; v2) és az u(u1; u2) párhuzamosak, ha v1/u1 = v2/u2.**

**Két vektor merőlegessségének feltétele: a két vektor skalárszorzata 0 legyen. A v(v1; v2) és az u(u1; u2) vektorok merőlegesek egymásra, ha v1u1 + v2u2 = 0.**

**Adott vektorral párhuzamos egységvektor koordinátái: úgy kapjuk meg, hogy a vektort elosztjuk a hosszával. A v(v1; v2) vektor hossza Pit. tétele szerint √(v12+v22), így a vele párh. egységvektor összetevői: (v1/(v12+v22); v2/(v12+v22)).**

**Az α szögű egységvektor koordinátái: a szögfüggvények általános definíciója szerint az α szögű egységvektor vízszintes vetülete (előjelesen) éppen cosα, a függőleges vetülete pedig sinα. Tehát a koordináták: (cosα; sinα).**

**Vektor elforgatása ±90°-kal: Ha a (v1; v2) vektort +90°-kal elforgatjuk, a (-v2; v1) vektorhoz jutunk. Ha a (v1; v2) vektort -90°-kal forgatjuk el, akkor pedig ennek ellentettjéhez, a (v2; -v1) vektorhoz. Igazolás: a három vektor hossza egyenlő, éspedig √(v12 + v22); az másodiknak és harmadiknak az elsővel vett skalár szorzata 0, tehát tényleg merőlegesek. Síknegyedenként ellenőrizhető, hogy a megadott irányú forgatásnál tényleg a tétel szerint alakul az előjelváltás a koordinátáknál.**

Feladatok:

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | Adottak az **a**(4; 5) és **b**(2; –1) vektorok. Számítsuk ki a 3**a** – **b**/2 vektor koordinátáit! |
| 1.H | a.) Adottak a **c**(3; 2) és a **d**(–1; –1) vektorok. Számítsuk ki a 7**c–**2**d** vektor koordinátáit! **7c – 2d (23; 16).**  b.) Számítsuk ki a 3**d** – 2,5**c** vektor összetevőit is! |
| 2. | Adottak az **a**(4; 5) és **b**(2; –1) vektorok. Számítsuk ki a skaláris szorzatukat! |
| 2.H | a.) Adottak a **c**(3; 2) és a **d**(–1; –1) vektorok. Számítsuk ki a skaláris szorzatukat! **–5.**  b.) Számítsuk ki a **c**+**d** és a 2**c**–**d** vektorok skaláris szorzatát!  c.) Határozzuk meg mindazokat a vektorokat, amelyeknek az **e**-ral vett skaláris szorzata 4, feltéve, hogy **e**(3; –4). |
| 3. | Adottak az **a**(4; 5) és **b**(2; –1) vektorok. Számítsuk ki a hosszukat! |
| 3.H | a.) Adottak a **c**(3; 2) és a **d**(–1; –1) vektorok. Számítsuk ki a hosszukat! **|c| = √13; |d| = √2.**  b.) Számítsuk ki a **c**+**d**, a **c**–**d**, a 2**c**–5**d** vektorok hosszát!  c.) Az **u**(5; y) vektor hossza 13 egység. Határozzuk meg y értékét!  d.) A **v**(k; 7–k) vektor hossza 5 egység. Határozzuk meg k lehetséges értékeit! |
| 4. | Adottak az **a**(4; 5) és **b**(2; –1) vektorok. Számítsuk ki, hogy mekkora szöget zárnak be egymással! |
| 4.H | a.) Adottak a **c**(3; 2) és a **d**(–1; –1) vektorok. Számítsuk ki, hogy mekkora szöget zárnak be egymással!  b.) Határozzuk meg a **c**+**d** és a **c**–**d** vektorok hajlásszögét!  c.) Mekkora a **c** és a **c**+**d** vektorok hajlásszöge?  d.) Határozzuk meg a **v1**(–2; 1) és **v2**(–3; –5) vektorok hajlásszögét! **φ = 85,60°.**  e.) Határozzuk meg az **e**(4; 1) és a **f**(1; 3) vektorok hajlásszögét! **α = 57,53°.**  f.) Mekkora szöget zárnak be egymással az **g**(1; 8) és a **h**(–3; –2) vektorok? **ε = 130,82°.**  g.) Határozzuk meg a **z1**(2; 5) és **z2**(–3; 1) vektorok hajlásszögét! **β = 93,37°.** |
| 5. | Adjuk meg a **v**(3; 7) vektorral párhuzamos **u**(–5; y) vektor második összetevőjét! |
| 5.H | a.) Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy az **a**(x; 4) és a **b**(–7; 9) vektorok párhuzamosok legyenek! **x = –28/9.**  b.) Határozzuk meg k értékét úgy, hogy az **u**(k; 8) és a **v**(k–3; –4) vektorok párhuzamosak legyenek! **k = 2.**  c.) Az **u1**(k+1; 15–k) vektor párhuzamos az **u2**(5; k–2) vektorral. Mekkora lehet k értéke? **k1 = 7; k2 = -11.** |
| 6. | Adjuk meg a **v**(3; 7) vektorra merőleges **u**(–5; y) vektor második összetevőjét! |
| 6.H | a.) Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy az **a**(x; 4) és a **b**(–7; 9) vektorok merőlegesek legyenek egymásra! **36/7.**  b.) Határozzuk meg c értékét úgy, hogy az **u**(4; c) és a **v**(c; c–9) vektorok merőlegesek legyenek egymásra! **0 és 5.**  c.) Mekkora a k értéke, ha tudjuk, hogy **d**(k; k+1) merőleges a **p**(1–k; k/2) vektorra? |
| 7. | Mekkora szöget zár be a **c**(9; 7) vektor a koordinátatengelyekkel? |
| 7.H | a.) Mekkora szöget zár be a **d**(√3; 2) vektor a koordinátatengelyekkel? **az x tengellyel 49,11°, y-nal 40,89°-ot .**  b.) Határozzuk meg az **a**(3; –√3) vektornak a koordinátatengelyekkel alkotott szögét!  c.) A **b**(4; k) vektor az x tengellyel kétszer akkora szöget zár be, mint az y tengely pozitív felével. Határozzuk meg k értékét, ha tudjuk, hogy pozitív szám! |
| 8. | Írjuk fel a 315°-os egységvektor koordinátáit! |
| 8.H | a.) Írjuk fel a 60°-os egységvektor koordinátáit!  **(1/2; √3/2).**  b.) Írjuk fel a 2 egység hosszú, az x tengellyel –30º-os előjeles szöget bezáró vektor összetevőit!  c.) Egy egységvektor vízszintes összetevője 0,2. Hány fokos egységvektorról lehet szó? |
| 9. | Határozzuk meg az (5; 12) vektorral párhuzamos egységvektor koordinátáit! |
| 9.H | a.) Határozzuk meg a (4; 3) vektorral párhuzamos egységvektor koordinátáit!  **(0,8; 0,6).**  b.) Határozzuk meg a (7; 24) vektorral párhuzamos, 2 egység hosszú vektor koordinátáit! **(0,28; 0,96).**  c.) Határozzuk meg az (1; 4) vektorral párhuzamos egységvektor koordinátáit!  **(1/√17; 4/√17).**  d.) Legyen **v**(3; 4). Az **u** vektorról tudjuk, hogy **v**-ral párhuzamos és hossza 9 egység. Adjuk meg **u** összetevőit!  **u(5,4; 7,2).**  e.) Határozzuk meg a (–3; 7) vektorral ellentétes irányba mutató egységvektor koordinátáit! **(3/√58; -7/√58).** |
| 10. | Határozzuk meg a (7; 24) vektorra merőleges egységvektor összetevőit! |
| 10.H | a.) Adjuk meg a (√13; √12) vektorra merőleges egységvektor összetevőit!  b.) Egy vektor hossza 4 egység, és merőleges a (12; 16) vektorra. Adjuk meg az összetevőit!  c.) Határozzuk meg a (–2; 1) vektorra merőleges egységvektorra merőleges egységvektor koordinátáit!  d) Határozzuk meg a (4; 9) vektorra merőleges egységvektor összetevőit 10-3 pontossággal! |
| 11. | A (3; 4) vektorral az (5; y) vektor 53,13°-os szöget zár be. Határozzuk meg az y értékét! |
| 11.H | a.) Az (5; 2) vektor és az (x; 10) vektor ugyanakkora szöget zár be egymással, mint a (4; 10) és a (2; 1) vektorok. Határozzuk meg x értékét!  **Az utóbbi két vektor hajlásszögének koszinusza: cosφ = (4∙2 + 10∙1) / (√116∙√5) = 18 / √580 = 9 / √145.**  **Az első két vektor skalárszorzatát felírjuk kétféleképpen: 5x + 20 = √29 ∙ √(x2 + 100) ∙ 9 / √145. Egyszerűsítve: 5x + 20 = 9√(x2 + 100) / √5. Mindkét oldalt √5-tel szorozzuk majd négyzetre emeljük: 125x2 + 1000x + 2000 = 81x2 + 8100. Rendezve: 44x2 + 1000x – 6100 = 0, vagyis 11x2 + 250x – 1525 = 0. Megoldások: x1,2 = (-250 ± 360) / 22, így x1 = 5; x2 = –305/11.**  b.) Az (1; 7) és az (5; y) vektorok bezárt hegyesszögének tangense 4/3. Határozzuk meg y értékét! **y1 = 85/31; y2 = –5.** |
| 12. | Határozzuk meg a térbeli **v1**(3; 5; 1) és **v2**(–2; –3; 4) vektorok hajlásszögét! |
| 12.H | a.) Határozzuk meg a térbeli **v1**(1; 2; 5) és **v2**(–1; –3; 2) vektorok hajlásszögét!  b.) Mekkora szöget zár be az a.) feladatban szereplő vektorok összege a különbségükkel?  c.) Mekkora szöget zárnak be a fenti vektorok az **i**; **j**; **k** egységvektorokkal? |

Pontok, osztópontok koordinátái

Elméleti anyag:

Pont koordinátái - **az oda mutató helyvektor koordinátái. (Def.)**

Felezőpont koordinátái: **egy szakasz felezőpontjának koordinátáit megkapjuk, ha a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepét vesszük. (Tétel, bizonyítása órán volt.)**

**Másképpen: egy szakasz felezőpontjába mutató helyvektor megegyezik a szakasz végpontjaiba mutató helyvektorok számtani közepével. - Ez a szabály síkban, térben egyaránt érvényes.**

Harmadolópont koordinátái: Legyen adott az AB szakasz. A szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontjának koordinátáit megkaphatjuk úgy, hogy az A pont megfelelő koordinátáinak kétszereséhez hozzáadjuk a B pont megfelelő koordinátáját, majd az eredményt elosztjuk hárommal. (Tétel, bizonyítása órán volt.)

Másképpen: egy szakasz harmadolópontjába mutató helyvektor megegyezik a szakasz végpontjaiba mutató helyvektorok súlyozott számtani közepével. A közelebbi végpont kétszeres, a távolabbi végpont egyszeres súllyal szerepel.

Az m:n arányú osztópont koordinátái: egy szakasz m:n arányú osztópontjába mutató helyvektor megegyezik a szakasz végpontjaiba mutató helyvektorok súlyozott átlagával, amennyiben a súlyok m és n, a nagyobbik súly a közelebbi, a kisebbik súly a távolabbi végponthoz tartozik. Képlet szerint: **p** = (n**a** + m**b**) / (n+m)

Háromszög súlypontjának koordinátái: egy háromszög súlypontjába mutató helyvektor mindig egyenlő a csúcsokba mutató három helyvektor számtani közepével. (Tétel, bizonyítás órán.)

A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást – vektoros bizonyítás: azt könnyű belátni, hogy az AFA szakasz FA-hoz közelebbi harmadolópontjába mutató helyvektor éppen (**a** + **b** + **c**)/3. Ugyanez a helyvektor mutat a BFB szakasz FB-hez közelebbi harmadolópontjába és a CFC szakasz FC-hez közelebbi harmadolópontjába is.

Szakasz meghosszabbítása adott arányban - az ilyen feladatokat úgy kezeljük, hogy arra gondolunk, hogy a meghosszabbítás során kapott új végpont és a szakasz tőle távolabbi végpontja egy nagyobb szakaszt határoz meg, melynek az eredeti szakasz másik végpontja mindig egy adott arányú osztópont. Felírva a tanult vektoregyenletet, ebből az ismeretlen helyvektor mindig kifejezhető.

Feladatok:

|  |  |
| --- | --- |
| 13. | Határozzuk meg az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha *A*(4; 11) és *B*(–2; 3)! |
| 13.H | a.) Határozzuk meg az *EF* szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha *E*(4; 11) és *F*(–2; 3)!  b.) Határozzuk meg az AB szakasz felezőpontjának összetevőit, ha A(1; 2; 3) és B(4; 5; 6)!  c.) Egy parallelogramma két szemközti csúcsa: A(3; –4) és C(9; 12). Határozzuk meg a középpont koordinátáit!  d.) Legyen A(–5; 2) és B(1; –9). Határozzuk meg F :=FAB koordinátáit, majd G:=FAF és H:=FBF összetevőit! |
| 14. | Határozzuk meg az *AB* szakasz harmadolópontjainak koordinátáit, ha *A*(5; 11) és *B*(–1; 17)! |
| 14.H | a.) Határozzuk meg az *XY* szakasz harmadolópontjainak koordinátáit, ha *X*(4; 7) és *Y*(–2; –8)!  b.) Legyen E(4; 5) és F(7; 2). Határozzuk meg az EF szakasz E-hez közelebbi harmadolópontjának koordinátáit!  c.) Egy háromszögben A(–5; 2); a szemközti oldal felezőpontja F(10; 7). Határozzuk meg a háromszög súlypontjának összetevőit! |
| 15. | Határozzuk meg a *PQ* szakasz ötödölőpontjainak koordinátáit, ha *P*(1; 9) és *Q*(–9; 4) |
| 15.H | a.) Határozzuk meg az *ST* szakasz hetedelőpontjainak koordinátáit, ha *S(–2; –2)* és *T*(5; 19)!  b.) Adjuk meg a *KL* szakasz hatodolópontjainak koordinátáit, ha *K*(2; 11) és *L*(6; 10)!  c.) Határozzuk meg az EF szakasz tizenharmadolópontjainak koordinátáit, ha E(–20; 15) és F(6; 2)! |
| 16. | Adjuk meg az *AB* szakaszt AP:PB = 3:4 arányban osztó pont koordinátáit, ha *A*(3; 1) és *B*(5; –2)! |
| 16.H | a.) Az EF szakaszt a P pont 2:9 arányban osztja. Határozzuk meg az osztópont koordinátáit, ha A(1; –1) és B(7; 8)!  b.) Az AB szakaszt a P pont AP:PB = 1:√2 arányban osztja. Határozzuk meg P összetevőit, ha A(–3; –1) és B(4; 2)!  c.) Milyen arányban osztja a CD szakaszt annak 3 abszcisszájú pontja? Határozzuk meg a pont ordinátáját is! C(–2; 10) és D(7; –12,5). |
| 17. | Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: *A*(1; 3); B(4; –2); C(–5; 1). Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit! |
| 17.H | a.) Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: *A*(2; 5); B(4; –2); C(–6; 0). Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!  b.) Egy háromszög csúcspontjainak összetevői: A(1; 1); B(10; –8); C(–5; 4). Határozzuk meg a háromszög súlypontjának (S) összetevőit, majd az ABS, a BCS és a CAS háromszögek súlypontjainak összetevőit!  c.) Egy háromszög egyik csúcsa az origó, a másik kettő rácspontokba esik a tengelyeken úgy, hogy távolságuk 13 egység. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának lehetséges helyzeteit! |
| 18. | Egy háromszög két csúcsának koordinátái: *A*(7; 7); *B*(2; 6); a súlypont koordinátái: *S*(1; 4). Határozzuk meg a harmadik csúcspont koordinátáit! |
| 18.H | a.) Egy háromszög két csúcsának koordinátái: *A*(5; 4); *B*(2; –5); a súlypont az origóba esik. Határozzuk meg a harmadik csúcspont koordinátáit!  b.) Egy háromszögben A(3; 3); B(9; 0); S(2; 2). Határozzuk meg a harmadik csúcspont összetevőit!  c.) Egy háromszög egyik csúcsa az origó, egyik oldalának felezőpontja F(1; 3), súlypontja S(3; 1). Határozzuk meg a másik két csúcs összetevőit! |
| 19. | Egy szakasz végpontjai: *A(3; 1)* és *B(–2; –1)*. A szakaszt meghosszabbítjuk *A*-n túl a szakasz hosszának kétszeresével. Határozzuk meg az új végpont koordinátáit. |
| 19.H | a.) Egy szakasz végpontjai: C(2; –1) és D(–3; 9). Határozzuk meg C-nek D-re, illetve D-nek C-re vonatkozó tükörképét!  b.) Az AB szakaszt hosszabbítsuk meg B-n túl hosszának négyszeresével. Határozzuk meg az új végpont összetevőit, ha A(–3; –19) és B(–17; –2)!  c.) Egy szakasz végpontjai: *S*(9; 6) és *T*(15; 17). A szakaszt mindkét irányban meghosszabbítjuk a hosszának felével. Határozzuk meg az új végpontok (S’ és T’) koordinátáit! |
| 20. | Egy parallelogramma két csúcsának koordinátái: (7; –1) és (0; 3), középpontjáé (5; 2). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit, és a parallelogramma kerületét! |
| 20.H | a.) Egy parallelogramma két csúcsának koordinátái: (2; –2) és (6; –5), középpontjáé (1; 2). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit és az átlók hosszát!  b.) Egy parallelogramma két csúcsának összetevői: (4; 5) és (–2; 9) és (0; –1). Határozzuk meg a negyedik csúcs lehetséges helyzeteit! |

Elméleti anyag:

Kezdő- és végponttal megadott vektor koordinátái (Kezdő- és végponttal megadott szabad vektorok): A koordináta-rendszer A pontjából B pontjába mutató szabad vektor mindig felírható a B-be és az A-ba mutató helyvektorok különbségeként:

**AB** = **b** - **a**.

Végpontjaival megadott szakasz hossza: készítsük el az egyik végpontból a másik végpontba mutató vektort, koordinátáinak négyzetösszegéből vonjunk négyzetgyököt, s így épp a keresett szakaszhosszot kapjuk.

Adott vektorral eltolt alakzat pontjainak régi és új koordinátái: Az alakzat tetszőleges pontja legyen A(a1; a2), az eltolásvektor pedig **v**(v1, v2). Ekkor az eltolás után a képpont mindig A’(a1+v1; a2+v2) lesz, másképpen: **a’** = **a** + **v**.

Adott vektorral párhuzamos egységvektor koordinátái: számítsuk ki az adott vektor hosszát, majd osszuk el a vektort a hosszával, így irányán nem változtattunk, hossza viszont 1 lett.

Adott vektor elforgatása 90 fokkal (síkban): koordinátacsere, az egyiknél előjelváltás. Ha az új első koordinátánál váltunk előjelet, akkor +90 fokos, ha az új második koordinátánál váltunk előjelet, akkor pedig -90 fokos elforgatás történt.

Feladatok:

|  |  |
| --- | --- |
| 21. | Egy szakasz egyik végpontja: *A*(4; 5); másik végpontja: *B*(7; –2). Határozzuk meg az A-ból B-be mutató vektor koordinátáit! |
| 21.H | a.) Egy szakasz végpontjai: V(3; 3) és W(6; –1). Határozzuk meg a V-ből W-be, illetve a W-ből V-be mutató vektor koordinátáit!  b.) Legyen X(2; 3) és Y(3; –2). Határozzuk meg az XY és az YX vektorokat!  c.) Egy háromszögben A(2; 9); B(1; 4); C(–3; 7). Határozzuk meg az oldalvektorokat, illetve a háromszög súlypontjából a csúcsokhoz mutató **sA**; **sB**; **sC** vektorokat! |
| 22. | Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: A(4; 5); B(–3; –1); C(0; 8). A háromszöget eltoljuk a **v**(1; –5) vektorral. Határozzuk meg az eltolt háromszög csúcsainak (A’; B’; C’) koordinátáit! |
| 22.H | a.) Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: A(3; –6); B(–2; –1); C(1; 7). A háromszöget eltoljuk a **v**(5; 3) vektorral. Határozzuk meg az eltolt háromszög csúcsainak (A’; B’; C’) koordinátáit!  b.) A fenti eredeti háromszöget úgy toljuk el, hogy A csúcsának a képe FBC-be kerül. Határozzuk meg az eltolt háromszög csúcsainak (A’’; B’’; C’’) koordinátáit! |
| 23. | Egy háromszög egyik csúcsa (7; –4). A másik két csúcsba ebből a pontból a (3; 4) és a (–2; 8) vektorok mutatnak. Határozzuk meg a háromszög másik két csúcsának koordinátáit! |
| 23.H | a.) Egy háromszög egyik csúcsa (3; –2). A másik két csúcsba ebből a pontból a (2; 5) és a (3; –4) vektorok mutatnak. Határozzuk meg a háromszög másik két csúcsának koordinátáit!  b.) Egy háromszög egyik csúcsa (1; 8). A másik két csúcsból ebbe a pontba a (3; –1) és a (–5; 4) vektorok mutatnak. Határozzuk meg a háromszög másik két csúcsának összetevőit!  c.) Egy négyszög egyik csúcsa A(2; 1). A másik három csúcsba ebből a pontból a (2; 1); a (3; 8) és a (–4; 2) vektorok mutatnak. Határozzuk meg a négyszög kerületét! |
| 24. | Egy háromszög oldalfelező pontjainak a koordinátái: (4; –1); (10; 3); (6; 6). Határozzuk meg a háromszög csúcsainak koordinátáit! |
| 24.H | a.) Egy háromszög oldalfelező pontjainak koordinátái: (0; 0); (2; 3); (4; –1). Határozzuk meg a háromszög csúcsainak koordinátáit!  b.) Egy háromszög két oldalfelező pontja: (3; 2) és (5; 5), súlypontja (3; 5). Határozzuk meg a harmadik oldalfelező pontnak, majd a csúcsoknak az összetevőit! |
| 25. | A (6; 3) vektort forgassuk el +90 fokkal! Határozzuk meg az elforgatott vektor koordinátáit! |
| 25.H | a.) Egy vektort 90°-kal elforgattunk, így a (7; –2) vektort kaptuk Melyik lehetett az eredeti vektor?  b.) A (3; –2) vektort 2007-szer elforgatjuk +90º-kal. Határozzuk meg az elforgatott vektor összetevőit!  c.) Ha egy vektort –810 fokkal elforgatunk, akkor a (–5; –6) vektorhoz jutunk. Melyik lehetett az eredeti vektor? |
| 26. | Forgassuk el az AB szakaszt az origó körül +90°-kal, ha A(3; 4) és B(–1;8). |
| 26.H | a.) Forgassuk el az XY szakaszt az origó körül –90°-kal, ha X(4; 1) és Y(1; –7).  b.) Forgassuk el a CG szakaszt az origó körül +90º-kal, ha C(3; 8) és G(–2; –1). |
| 27. | Forgassuk el az EF szakaszt a P(2;4) pont körül 90°-kal, ha E(4; –2) és F(8; 9). |
| 27.H | a.) Forgassuk el a KL szakaszt a Q(–2; –4) pont körül –90°-kal, ha K(0; 2) és L(–5; –3)!  b.) Az ABC háromszöget forgassuk el súlypontja körül +90º-kal és határozzuk meg az új helyzetű csúcsok összetevőit, ha A(3; 5); B(–3; 8) és C(–6; –1)! |
| 28. | Legyen A(3; 4); B(1; –1) és C(–5; 5). Határozzuk meg az ABC szög nagyságát és előjelét! |
| 28.H | a.) Legyen A(3; 4); B(1; –1) és C(–5; 5). Határozzuk meg az ACB szög nagyságát és előjelét!  b.) Határozzuk meg az ABC szög nagyságát és előjelét, ha A(2; 2); B(3;–1); C(4; –5)! |
| 29. | Határozzuk meg az ABC háromszög szögeit, ha A(0;1); B(–5;7) és C(2; –1). |
| 29.H | a.) Határozzuk meg az EFG háromszög szögeit, ha E(2; 2); F(9; –2) és G(5; 4).  b.) Legyen A(4; 7); B(9; 1) és C(2; –2). Mekkora szöget zárnak be egymással a háromszög súlypontjából a csúcsokba mutató vektorok?  c.) Az ABC háromszöget a BC oldal felezőpontja két háromszögre bontja. Határozzuk meg ennek a két háromszögnek a szögeit, ha A(0; 0); B(2; 7); C(–6; 1)! |
| 30. | Egy négyzet két szomszédos csúcsának koordinátái: A(3; 5) és B(7; –1). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit! |
| 30.H | a.) Egy négyzet két szomszédos csúcsának koordinátái: A(1; 2) és B(–2; 3). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit!  b.) Egy négyzet egyik csúcsának koordinátái: (4; –1). A belőle kiinduló egyik élnek a csúcshoz közelebbi harmadolópontja: H(6; 2). Határozzuk meg a többi csúcs koordinátáit! |
| 31. | Egy négyzet két szemközti csúcsának koordinátái: B(2; 4) és D(8; –6). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit! |
| 31.H | a.) Egy négyzet egyik csúcsának koordinátái: A(3; 9). A négyzet középpontjának koordinátái: K(–1; 4). Határozzuk meg a többi csúcs koordinátáit!  b.) Egy négyzet egyik csúcsának koordinátái: (–3; –5). A négyzet köré írt körének középpontja a (2; 7) pont. Határozzuk meg a többi csúcs koordinátáit!  c.) Egy négyzet két csúcsának koordinátái: (3; 5) és (–7; 9). Határozzuk meg a másik két csúcs lehetséges helyzeteit! |
| 32. | Egy téglalap egyik oldala kétszerese a másik oldalának. Az egyik rövidebbik oldal végpontjai: A(0; 2) és B(3; –2). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit! |
| 32.H | a.) Egy téglalap egyik oldala háromszorosa a másik oldalnak. Az egyik rövidebbik oldal végpontjai: B(4; 4) és C(7; 0). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit!  b.) Egy téglalap egyik oldala a kerület hatodrésze. Egy ilyen oldalának határoló pontjai: A(3; –1) és B(5; –2). Határozzuk meg a másik két csúcs összetevőit!  c.) Egy téglalap egyik oldala másfélszerese a másiknak. Az egyik rövidebbik oldal végpontjai: (2; 5) és (6; –1). Határozzuk meg a másik két csúcs összetevőit! |
| 33. | Egy téglalap átlójának hossza 13 egység, két csúcsának koordinátái: (1; 0) és (4; 4). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit! |
| 33.H | a.) Egy téglalap átlójának hossza 17 egység, két csúcsának koordinátái: (–1; –3) és (11; 6). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit!  b.) Egy téglalap köré írt körének sugara 5 egység, két csúcsának koordinátái: (2; 3) és (3; 6). Határozzuk meg a másik két csúcs összetevőit! |

Vektorok és koordináták – összefoglaló feladatsor

I. Egyszerű feladatok:

|  |  |
| --- | --- |
| 41. | Határozzuk meg a ***v***(4; 1) vektor végpontjának koordinátáit, ha a kezdőpont összetevői: (–3; –9)! |
| 41.H | a.) Határozzuk meg a ***k***(–3; –4) vektor végpontjának koordinátáit, ha a kezdőpont összetevői: (5; –2)!  b.) A **v** vektor kezdőpontja (3; 4); végpontja (2; –1). Ha a kezdőpontot a (–11; 20) pontba helyeznénk, hová kerülne a vektor végpontja?  c.) A **k**(–9; –8) vektor kezdőpontja a P(2; 1) pont. Határozzuk meg a vektor végpontjának összetevőit! |
| 42. | Határozzuk meg a ***v***(11; 13) vektor ellentettjének koordinátáit! |
| 42.H | a.) Egy vektor ellentettjének koordinátái: (5; –11). Határozzuk meg az eredeti vektor összetevőit!  b.) Egy vektor koordinátái (3; π). Határozzuk meg az ellentett vektor összetevőit! |
| 43. | Egy vektor négyszerese a ***4v***(9; –12) vektor. Határozzuk meg az eredeti vektor (–2)-szeresét! |
| 43.H | a.) Egy vektor tizenkétszerese a ***12v***(6; –30) vektor. Határozzuk meg az eredeti vektor (–4)-szeresét!  b.) Egy vektor fele a **0,5v**(3; 9,2) vektor. Határozzuk meg az eredeti vektor összetevőit!  c.) Egy vektor tízszerese a **10v**(3; 7) vektor. Határozzuk meg az eredeti vektor –9-szeresének összetevőit! |
| 44. | Ha egy vektort pozitív irányban 90°-kal elforgatunk, akkor a (3; –5) vektorhoz jutunk. Határozzuk meg az eredeti vektor összetevőit! |
| 44.H | a.) Ha egy vektort negatív irányban 90°-kal elforgatunk, akkor a (4; 7) vektor ellentettjéhez jutunk. Határozzuk meg az eredeti vektor összetevőit!  b.) Az **u**(14; 37) vektort egymás után 2007-szer elforgatjuk +90º-kal. Adjuk meg az eredményül kapott vektor összetevőit!  c.) Az **a**(17; 19) vektort elforgatjuk 320 310º-kal, így az **a’** vektorhoz jutunk. Határozzuk meg az **a+a’** vektorösszeg összetevőit! |
| 45. | Határozzuk meg az AB vektor összetevőit, ha A(1; 2) és B(3; 4)! |
| 45.H | a.) Határozzuk meg a CD vektor összetevőit, ha C(–4; 6) és D(1; 9)!  b.) A(3; 4); B(–2; 3); C(2; 9). Határozzuk meg az AB, a BC, a CA, a BA, a CB és az AB vektor összetevőit!  c.) Legyen A(k; m) és B(m; k). Határozzuk meg az AB vektor irányszögét! |
| 46. | Határozzuk meg a (7; 3) vektor hosszának pontos értékét! |
| 46.H | a.) Határozzuk meg a (2; –9) vektor hosszának pontos értékét!  b.) Legyen C(3; 4) és D(–4; 8). Határozzuk meg a CD vektor hosszának pontos és közelítő értékét!  c.) Legyen A(1; –5); B(2; 7); C(7; 2). Határozzuk meg az ABC háromszög kerületét! |
| 47. | A (2; y) vektor hossza √40 egység. Mekkora lehet az y? |
| 47.H | a.) Az (x; –5) vektor hossza √106 egység. Mekkora lehet az x? **x = ±9.**  b.) Az (x; x+1) vektor hossza 5 egység. Határozzuk meg x lehetséges értékeit! **3 és -4.**  c.) Az **u**(*a*2–3*a*+1; –12√3) vektor hossza *a*2+*a*+1. Határozzuk meg *a* lehetséges értékeit! |
| 48. | Mekkora szöget zár be az (5; –2) vektor az y tengely pozitív felével? |
| 48.H | a.) Mekkora szöget zár be a (3; 2) vektor az x tengely negatív felével?  b.) Mekkora szöget zár be a (2*a*; –3*a*) vektor az y tengely negatív felével?  c.) Mekkora hegyesszöget zár be a (–4; –11) vektor a koordinátatengelyekkel? |
| 49. | Egy egységvektor egyik koordinátája 0,6. Mekkora lehet a másik koordinátája? |
| 49.H | a.) Egy egységvektor egyik koordinátája –0,3. Mekkora lehet a másik koordinátája?  b.) Egy egységvektor egyik koordinátája 0,28. Mekkora lehet a másik koordinátája?  c.) Egy egységvektor egyik koordinátája 1,12. Mekkora lehet a másik koordinátája? |
| 50. | Számítsuk ki a 72 fokos egységvektor koordinátáit számológéppel 4 jegy pontossággal! |
| 50.H | a.) Számítsuk ki a 342 fokos egységvektor koordinátáit számológéppel 4 jegy pontossággal!  b.) Adjuk meg a 15 fokos egységvektor koordinátáit pontosan, az összegzési tételek felhasználásával!  c.) Egy egységvektor abszcisszája 0,32. Hány fokos lehet ez az egységvektor? |
| 51. | Egy szakasz végpontjainak koordinátái: A(3; 4) és B(–2; –11). Határozzuk meg a szakaszt 2:3 arányban osztó pont koordinátáit, ha az osztópont A-hoz esik közelebb! |
| 51.H | a.) Egy szakasz végpontjainak koordinátái: E(–5; –2) és B(–4; –10). Határozzuk meg a szakaszt 3:7 arányban osztó pont koordinátáit, ha az osztópont B-hez esik közelebb! **(-4,3; -7,6).**  b.) Egy szakasz végpontjainak koordinátái: T(2; –19) és Z(–21; 27). Határozzuk meg a szakaszt 11:12 arányban osztó pontok koordinátáit!  c.) Egy szakasz egyik végpontjának koordinátái: A(3; –1). A szakaszt AP:PB = 5:8 arányban osztó P pont abszcisszája –2; a B pont ordinátája 25. Határozzuk meg P és B összetevőit! |
| 52. | Az AB vektort A körül elforgatjuk +90°-kal. Határozzuk meg az elforgatott vektor végpontjának koordinátáit, ha A(–1; 3) és B(5; 6)! |
| 52.H | a.) Az AB vektort A körül elforgatjuk +270°-kal. Határozzuk meg az elforgatott vektor végpontjának koordinátáit, ha A(–4; –1) és B(–9; 5)!  b.) A VB vektort elforgatjuk B körül –90º-kal, így a (–9; 11) vektorhoz jutunk. Határozzuk meg az eredeti VB vektort, ha V(1; 2)!  c.) A CD vektort egy B pont körül forgatjuk el +90º-kal. Határozzuk meg az elforgatott vektor összetevőit, ha B(–3; 5); C(2; 1) és D(–1; –10)! |
| 53. | Az ABC háromszöget elforgatjuk a P(3; 2) pont körül –90°-kal. Határozzuk meg az elforgatott háromszög A’, B’ és C’ csúcsainak koortinátáit, ha A(0; 0); B(5; 1) és C(3; –2)! |
| 53.H | a.) Az ABC háromszöget elforgatjuk a P(7; 1) pont körül +90°-kal. Határozzuk meg az elforgatott háromszög A’, B’ és C’ csúcsainak koortinátáit, ha A(0; 2); B(4; –1) és C(–3; –2)!  b.) Az ABCD négyzetet elforgatjuk O(2; 1) körül +270º-kal. Határozzuk meg az elforgatott négyzet csúcsainak összetevőit, ha A(5; 1); B(4; –2); C(1; –1)!  c.) Az AB szakaszt forgassuk el először C körül +90º-kal, majd az eredményt D körül –90º-kal. Határozzuk meg a keletkező szakasz végpontjainak összetevőit, ha A(0; 2); B(3; 3); C(5; –1); D(11; –7)! |
| 54. | Az U(3; –1) pontot középpontosan tükrözzük a (–2; 5) pontra. Határozzuk meg a képpont összetevőit! |
| 54.H | a.) Ha egy pontot a P(2; 1) pontra tükrözünk, akkor a (–8; 2) ponthoz jutunk. Határozzuk meg az eredeti pont összetevőit!  b.) Egy parallelogramma két csúcsa A(3; 3) és B(7; 2). A parallelogramma középpontja K(4; 1). Határozzuk meg a másik két csúcs összetevőit!  c.) Egy középpontosan szimmetrikus hatszög három szomszédos csúcsa: B(3; 2); C(8; 1); D(9; –4). A szimmetria-középpont O(5; –1). Határozzuk meg a hiányzó három csúcs összetevőit, ábrázoljuk a hatszöget és számítsuk ki a kerületét! |
| 55. | Az AB szakaszt háromszorosra nagyítjuk a Q(2; 9) pontból. Határozzuk meg az A’B’ szakasz végpontjainak összetevőit, ha A(3; 8) és B(–1; 6)! |
| 55.H | a.) Az ABC háromszöget kétszeresre nagyítjuk a P(4; –4) pontból. A keletkező nagy háromszög csúcsai: A’(8; 12); B’(–2; 5) és C’(10; 2). Határozzuk meg az eredeti háromszög csúcsainak összetevőit!  b.) Az ABCD parallelogrammát a K(1; 1) középpontjából másfélszeresére nagyítjuk. Határozzuk meg a nagyított parallelogramma C’ és D’ csúcsainak összetevőit, feltéve, hogy A(5; –3) és B(–1; –5)!  c.) Az ABC háromszöget kétszeresére nagyítjuk a súlypontjából, majd a keletkező háromszöget felére kicsinyítjük az eredeti háromszög A csúcsából. Határozzuk meg a végeredményként kapott A’’, B’’ és C’’ csúcsok összetevőit, ha A(–1; 2); B(7; –4) és C(9; 8)! |
| 56. | Határozzuk meg a (4; –2) vektorra merőleges, 10 egység hosszú vektor összetevőit! |
| 56.H | a.) Határozzuk meg a (3; 4) vektorral párhuzamos, 24 egység hosszú vektor összetevőit! **(14,4; 19,2); (-14,4; -19,2)**  b.) Határozzuk meg az AB szakaszra merőleges, √116 hosszúságú vektor összetevőit, ha A(–4; –2) és B(1; –4)!  c.) Határozzuk meg az AB szakasz A-hoz legközelebbi ötödölőpontjába mutató helyvektorra merőleges, √68 egység hosszúságú vektor összetevőit, ha A(1; 2) és B(–19; –3)! |
| 57. | Döntsük el, hogy egy egyenesen vannak-e a következő pontok: K(3; 5); L(–1; 3); M(–10; 1)! |
| 57.H | a.) Döntsük el, hogy egy egyenesen vannak-e a következő pontok: S(2; 4); T(7; 0); U(–8; 12)!  b.) Döntsük el, hogy egy egyenesen vannak-e a következő pontok: A(0; 0); B(1; 8) és C(–2; –17)!  c.) Hány egyenest határoz meg a következő négy pont: P(2; 3); Q(4; 9); R(–1; –6); S(–8; –26)? |
| 58. | Döntsük el, hogy a következő négy pont parallelogrammát határoz-e meg! (0;0); (3;5); (4;–1); (7;4)! |
| 58.H | a.) Döntsük el, hogy a következő négy pont parallelogrammát határoz-e meg! (–1;2); (3;5); (1;0); (6;3)!  b.) Milyen négyszöget határoznak meg a következő pontok? (–24; –12); (3; 27); (–17; 12); (0; –5)  c.) Milyen négyszöget határoznak meg a következő pontok? (1; –3); (4; 11); (6, –1) és (5; –7). |
| 59. | Az ABC szabályos háromszög élei egységnyiek. Számítsuk ki az AB vektor és a BC vektor skaláris szorzatát! |
| 59.H | a.) Az ABCD négyzet élei 3 egységnyiek. Számítsuk ki az AB vektor és a CA vektor skaláris szorzatát!  b.) Az ABC szabályos háromszög élei 4 egység hosszúak. A háromszög középpontját jelöljük K-val. Határozzuk meg a KA vektor és a BC vektor skaláris szorzatát!  c.) A PQRS négyzet élei 6 egységnyiek. Legyen H a QR szakasz harmadolópontja. Határozzuk meg a PH és az RS, valamint a PH és HS vektorok skalárszorzatát! |
| 60. | Az ABCDEF szabályos hatszög éle egységnyi. Határozzuk meg a (**b–a**)⋅(**d–c)** skalárszorzatot, ha a kifejezésben szereplő vektorok a megfelelő nagybetűs csúcsba mutató helyvektorok! |
| 60.H | a.) Az ABCDEF szabályos hatszög éle egységnyi. Határozzuk meg a (**b–a**)⋅(**c–b)** skalárszorzatot, ha a kifejezésben szereplő vektorok a megfelelő nagybetűs csúcsba mutató helyvektorok!  b.) Az ABCDEF szabályos hatszög éle 2 egység hosszúságú. Határozzuk meg a következő kifejezés értékét, feltéve, hogy minden vektor a vele azonos betűjelű nagybetűs pontba mutat! **c∙b + a∙d – c∙d – a∙b**  c.) Az ABCDEFGH szabályos nyolcszög éle egységnyi. Határozzuk meg a következő skaláris szorzatokat!  i.) AB vektor ∙ DE vektor; ii.) AC vektor ∙ FG vektor iii.) (AB+CD) vektor ∙ (EF – GH) vektor |

Összetettebb feladatok (5-9 pontosak)

|  |  |
| --- | --- |
| 61. | Határozzuk meg az ABC háromszög legnagyobb szögét, ha A(2; 3; 4); B(1; 0; 0) és C(9; 0; 2)! |
| 61.H | a.) Határozzuk meg az ABC háromszög legkisebb szögét, ha A(2; 9); B(–1; –1); C(4;–5)!  b.) Határozzuk meg az ABC háromszögben az *a* oldalhoz tartozó súlyvonal és a *b* oldal hajlásszögét! Adatok az a.) feladatban.  c.) Mekkora a PQR háromszög legnagyobb és legkisebb szögének különbsége? P(3; 3); Q(4; –1); R(–2; 4). |
| 62. | Határozzuk meg az ABCD négyszög átlóinak szögét, ha A(0;1) B(2; 9); C(6; 8) és D(7; –1)! |
| 62.H | a.) Határozzuk meg az ABCD négyszög átlóinak szögét, ha A(0; 0); B(5; 0); C(6; 7) és D(8; –2)!  b.) Hány fokos szöget zárnak be a PQRS négyszög átlói, ha P(7; 2); Q(2; 3); R(1; –10); S(6; –8)?  c.) Egy konvex négyszög csúcsai: (1; 2); (10; –3); (4; 8) és (5; –7). Határozzuk meg az átlók szögét! ✏ |
| 63. | Adott a síkon a P(–4; –9) pont és a **v**(2; 4) vektor. A vektor kezdőpontját a P pontba helyezzük és a vektort megnyújtjuk úgy, hogy éppen az y tengely egyik pontjáig érjen. Melyik ez a pont? |
| 63.H | a.) Adott a síkon a P(–4; 9) pont és a **v**(2; 4) vektor. A vektor kezdőpontját a P pontba helyezzük és megnyújtjuk úgy, hogy éppen az x tengely egyik pontjáig érjen. Melyik ez a pont?  b.) Adott a síkon a B(3; –2) pont és az **u**(–11; 4) vektor. A vektor kezdőpontját a P pontba helyezzük és összenyomjuk úgy, hogy éppen az x tengely egyik pontjáig érjen. Melyik ez a pont?  c.) Adott a síkon az A(2; 13) pont és a **c**(3; 1) vektor. A vektor kezdőpontját az A pontba helyezzük és megnyújtjuk úgy, hogy végpontjának két összetevője ugyanaz a valós szám legyen. Határozzuk meg a végpont összetevőit! |
| 64. | Az ABC háromszög súlypontja S. A háromszöget eltoljuk az AS vektorral. Határozzuk meg az eltolt háromszög csúcspontjainak koordinátáit, ha A(2; 5); B(9; –1); C(7; –10)! |
| 64.H | a.) Az ABC háromszög két csúcsa: A(–3; –4); B(1; 3); súlypontjának koordinátái: S(2; 1). A háromszöget eltoljuk az SC vektorral. Határozzuk meg az eltolt háromszög csúcspontjainak koordinátáit!  b.) Az ABC háromszögben A(3; –3); B(–3; 3); C(6; 6). A háromszöget eltoljuk úgy, hogy súlypontja az AB szakasz felezőpontjába kerüljön. Határozzuk meg az eltolt háromszög csúcspontjainak koordinátáit!  c.) Egy ABC háromszög súlypontja S. A (2AB vektor – CS vektor) műveletével kapott vektorral eltolva az A’(3; 1); B’(–1; 4); C’(2; –5) háromszöghöz jutunk. Határozzuk meg az eredeti háromszög csúcsainak összetevőit! |
| 65. | Egy parallelogramma három csúcsa: (4;5); (0;2); (5;0). Határozzuk meg a negyedik csúcs lehetséges helyzeteit! |
| 65.H | a.) Egy négyzet két csúcsa: (3; 4) és (–1; 9). Határozzuk meg a két másik csúcs lehetséges helyzeteit!  b.) Egy parallelogramma három csúcsa: az origó; a (3; 0) és a (0; 8) pont. Határozzuk meg a negyedik csúcs lehetséges helyzeteit! |
| 66. | Egy ABC háromszöget súlypontja körül elforgatunk –90°-kal. Határozzuk meg az elforgatott háromszög csúcsainak koordinátáit, ha A(5; 0); B(9; –1) és C(7; 7)! |
| 66.H | a.) Egy ABC háromszöget tükrözünk a súlypontjára. Határozzuk meg az így keletkezett háromszög csúcsainak összetevőit, ha A(2; 3); B(9; –1) és C(–5; –8)!  b.) Egy ABC háromszöget a B csúcsa körül elforgatunk +450 fokkal. Határozzuk meg az elforgatott háromszög csúcsainak összetevőit, ha A(1; 8); B(3; –7); C(4; 2).  c.) Egy ABC háromszöget a BC oldalának A-hoz közelebbi negyedelőpontja körül egymás után tízszer elforgatunk –9 fokkal. Végeredményül az A’(5; 7); B’(2; –1); C’(–6; 3) csúcsokkal meghatározott háromszöghöz jutunk. Határozzuk meg az eredeti háromszög súlypontjának összetevőit! |
| 67. | Egy háromszög oldalfelező pontjainak koordinátái a körüljárás irányában: F1(0; 0); F2(1,5; 4); F3(5; 2,5). Határozzuk meg a csúcsok koordinátáit! |
| 67.H | a.) Egy háromszög oldalfelező pontjainak koordinátái (2;3); (4;5) (3;0). Határozzuk meg a csúcsok koordinátáit!  b.) Egy háromszög csúcsai: A(4; 3); B(1; 9); C(6; 7). Ez a három pont egy nagyobb háromszögnek a három oldalfelező pontja. Határozzuk meg a nagyobb háromszög csúcsainak összetevőit!  c.) Egy háromszög oldalfelező pontjai által alkotott háromszögnek az oldalfelező pontjai: (2; 3); (4; 5); (3; 1). Határozzuk meg az eredeti háromszög összetevőit! |
| 68. | Egy háromszög egyik oldalfelező pontja: (3; 8); egyik csúcsa (1;6) és súlypontja (2;3). Határozzuk meg a háromszög csúcsainak koordinátáit! |
| 68.H | a.) Egy háromszög két oldalfelező pontjának koordinátája: (2; 3) és (1; –2). A súlypont koordinátái: (0; 1). Határozzuk meg a csúcsok koordinátáit!  b.) Egy háromszög egyik csúcsa: (3; 9); szemközti oldalának felezőpontja: (0; –3); egy másik oldalának felezőpontja (5; 6). Határozzuk meg a csúcsok összetevőit, a háromszög kerületét és területét!  c.) Egy háromszög egyik oldalfelező pontja: (4; –9); egyik csúcsa (2; –5) és súlypontja (3; 1). Határozzuk meg a háromszög csúcsainak koordinátáit! |
| 69. | Egy rombusz hosszabbik átlója kétszerese a rövidebbik átlónak. A rövidebbik átló végpontjainak koordinátái: (3; 7) és (11; –1). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit! |
| 69.H | a.) Egy rombusz hosszabbik átlója háromszorosa a rövidebbik átlónak. A hosszabbik átló végpontjainak koordinátái: (–3; 5) és (6; 17). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit!  b.) Egy rombusz hosszabbik átlója 5 egységgel hosszabb a rövidebbik átlónál. A rövidebbik átló végpontjainak összetevői: (–2; –1) és (1; 3). Határozzuk meg a másik két csúcs összetevőit!  c.) Egy rombusz átlóinak az aránya: 2:3. Az egyik átló végpontjai: (2; 3) és (8; –9). Hol lehet a másik két csúcs? |
| 70. | Bontsuk fel a **v**(4; 9) vektort az **a**(–2; 1) és **b**(–1; 8) vektorokkal párhuzamos összetevőkre! Adjuk meg **a**-nak és **b**-nek a felbontásban szereplő λ1 és λ2 együtthatóit! |
| 70.H | a.) Bontsuk fel a **v**(16; 12) vektort az **a**(2; –1) és a **b**(1; 2) vektorokkal párhuzamos összetevőkre! Adjuk meg **a**-nak és **b**-nek a felbontásban szereplő λ1 és λ2 együtthatóit!  b.) Bontsuk fel az **i** és a **j** vektorokat az **u**(2; 3) és a **v**(1; 1) vektorokkal párhuzamos összetevőkre! Adjuk meg **u**-nak és **v**-nek a felbontásban szereplő λ1 és λ2 együtthatóit!  c.) Bontsuk fel a **v**(1; 2; 4) vektort az **a**(1; 1; 0); a **b**(1; 0; 1) és a **c**(0; 1; 1) vektorokkal párhuzamos összetevőkre! Adjuk meg a bázisvektorok (azaz **a**; **b**; **c**) λ1; λ2; λ3 együtthatóit! |

Bizonyítós feladatok (6-10 pontosak)

|  |  |
| --- | --- |
| 71. | Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben (az oldalakat, csúcsokat, a magasságpontot és a helyvektorokat a szokásos módon jelölve) (**c – m)⋅(a – b) =** 0! |
| 71.H | a.) Bizonyítsuk be, hogy ha ABCD deltoid, akkor – a helyvektorokat szokásos módon jelölve – a következő skalárszorzat mindig nullát ad eredményül: (**a–c**)⋅(**d–b**).  b.) Bizonyítsuk be, hogy ha ABCD rombusz, akkor – a helyvektorokat a szokásos módon jelölve – a következő egyenlőség mindig teljesül: **bc + ad** = **ab + cd**! (a két oldalon helyvektorok skaláris szorzatainak összege áll. |
| 72. | Bizonyítsuk be, hogy ha az **a** és **b** vektorok egyenlő hosszúak, akkor az összegük merőleges a különbségükre! |
| 72.H | a.) Bizonyítsuk be, hogy ha az **a** és **b** vektorok egyenlő hosszúak, akkor az összegük háromszorosa merőleges a különbségük –5-szörösére!  b.) Egy háromszög csúcsaiba a körülírt kör középpontjából az **a**; **b**; **c** vektorok mutatnak. Mutassuk meg, hogy közülük bármelyik kettőnek az összege merőleges a különbségükre! |
| 73. | Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges konvex négyszög két-két oldalfelező pontja által meghatározott szakasz (a négyszög középvonalai) felezi egymást! |
| 73.H | a.) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög valamelyik két oldalát összekötő középvonala és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonala felezi egymást!  b.) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonala a hozzá tartozó oldallal párhuzamos bármely egyenesnek a háromszögbe eső szakaszát felezi! |
| 74. | Adottak a síkon az A, B, C, D pontok, közülük semelyik három nem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy akármelyik három pont által meghatározott háromszög súlypontját összekötjük a negyedik ponttal, a keletkező szakaszoknak egyetlen közös pontjuk lesz, mégpedig a szakaszoknak a súlyponthoz közelebbi negyedelőpontja! |
| 74.H | Adott a síkon kilenc pont úgy, hogy közülük semelyik három nem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy ha a kilenc pontot akárhogyan hármas csoportokba osztjuk, majd tekintjük az így meghatározott három darab háromszögnek a súlypontját, az ezen súlypontok által meghatározott újabb háromszögnek a súlypontja bármely csoportosítás esetén ugyanaz! |

A felelés kérdései – vektorok és koordináták 11. osztály

1. Mit nevezünk vektornak? Mikor egyenlő két vektor? Mi a nullvektor?

2. A vektorösszeadás szabálya(i) és tulajdonságai

3. Mit értünk két vektor különbségén? Hogyan szerkeszthető meg (2 féle módszer!)

4. Mit értünk egy vektor számszorosán? A művelet tulajdonságai

5. Két vektor skalárszorzata, a skalárszorzat tulajdonságai

6. Helyvektor, szabad vektor; **i**; **j**; α szögű egységvektor

7. Vektor felbontása összetevőkre; a felbontás egyértelműsége síkban és térben

8. Helyvektor koordinátái, pont koordinátái

9. **Műveletek és koordináták (összeadás, kivonás, számszoros, skalár szorzat)**

10. **Két vektor hajlásszögének kiszámítása a derékszögű koordináták alapján**

11. **Vektorok párhuzamosságának és merőlegességének feltétele a koordináták alapján**

12. **Szakasz felező-, harmadolópontjába mutató vektor összetevői**

13. **Háromszög súlypontjába mutató vektor összetevői**; bizonyítsuk be, hogy **a súlyvonalak egy pontban metszik és harmadolják egymást**!

14. **Szakasz m:n arányú osztópontjának koordinátái**; szakasz meghosszabbítása adott irányban és arányban

15. Alakzat eltolása adott vektorral (összetevők vizsgálata)

16. **Helyvektor elforgatása ±90º-kal**

17. Középpontos tükrözés

18. Középpontos nagyítás, kicsinyítés adott arányban (szerkesztés ill. az új koordináták kiszámítása)

19. A négyszögek osztályozása (ismétlő anyag; négyzet, téglalap, par., rombusz, deltoid, trapézok definíciói, átlóinak szép tulajdonságai, ezek öröklődése)

20. A másodfokú egyenlet megoldóképlete és ennek **levezetése**

21. A háromszög nevezetes vonalai, pontjai és körei

A 18-20. kérdések régebben tanult anyagrészek ismétléseként kerülnek elő; a következő témakörben nagy szükség lesz rájuk.

A **vastag betűvel** szedett tételek bizonyítását is tudni kell!

Az egyenes egyenlete

|  |  |
| --- | --- |
| 81. | Írjuk fel az egyenes (egy) paraméteres egyenletrendszerét, ha P0(–9; –3) és **v**(–1; –4)! |
| 81 H | Írjuk fel az egyenes (egy) paraméteres egyenletrendszerét, ha  a.) P0(3; 4) és **v**(1; 3) b.) P0(–2; 4) és **v**(1; 2)  c.) P0(–1; –3) és **v**(5; –2) d.) P0(13; –40) és **v**(–1; –3) |
| 82. | Írjuk fel az egyenes (egy paraméteres egyenletrendszerét, ha P0(–2; 11) és **n**(2; –1)! |
| 82.H | Írjuk fel az egyenes (egy) paraméteres egyenletrendszerét, ha  e.) P0(3; 4) és **n**(1; 3) f.) P0(–1; 5) és **n**(1; 2)  g.) P0(30; –42) és **n**(–12; –13) h.) P0(1/2; 3/4) és **n**(5; –1) |
| 83. | Írjuk fel az 1. és 2. feladatban szereplő egyenesek normálvektoros egyenletét! |
| 83.H | Írjuk fel az 1H. és 2H. feladatban szereplő egyenesek normálvektoros egyenletét! |
| 84. | Adjuk meg az A(2; 4) ponton átmenő, az e: 2x–3y=π egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét! |
| 84.H | a.) Adjuk meg a P(–1; 9) ponton átmenő, az e: 4x – 13y = 50 egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét!  b.) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az x – 3y = 29 egyenletű egyenessel és áthalad az AB szakasz felezőpontján! A(2; 8) és B(–10; –2)! |
| 85. | Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik keresztülhalad a P(9,11) ponton és merőleges az  e: –2x+7y=12,23 egyenletű egyenesre! |
| 85.H | a.) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik merőleges az f: 3x – 7y = 10 egyenesre, és áthalad a  Q(3; 3) ponton!  b.) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik merőleges az e: 5x + 6y = 17 egyenletű egyenesre, és áthalad az origón!  c.) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik merőleges az e: 2x + 3y – 8 = 0 egyenletű egyenesre, és áthalad a PQ szakasz P-hez közelebbi harmadolópontján! P(42; 11); Q(–15; –62). |
| 86. | Adjuk meg a P(3/4; –5/4) és Q(1; –9) pontokon átmenő egyenes egyenletét! |
| 86.H | Adjuk meg a következő két ponton átmenő egyenes egyenletét!  a.) P(1; 1) és Q(3; 1) e.) P(1/2; 1) és Q(1; 1/2)  b.) P(4; 3) és Q(7; 1) f.) P(2; –1/3) és Q(–1/2; 4)  c.) P(–6; 5) és Q(0; –8) g.) P(1/5; 1/2) és Q(2/3; –7/3)  d.) P(2; 1) és Q(–2; –3) h.) P(3,2; 1,9) és Q(–2,3; 0,8) |
| 87. | Határozzuk meg a 3x+√2⋅y = 7 egyenletű egyenes  a.) 3 abszcisszájú c.) √2 abszcisszájú  b.) 5 ordinátájú d.) √2 ordinátájú pontjának koordinátáit |
| 87.H | Határozzuk meg az e: 5x – 4y = 1; az f: 11x + 12y = 13 és a g: x – 7 = 0 egyenletű egyenes  a.) 19 abszcisszájú b.) 3/7 abszcisszájú  c.) 700 ordinátájú d.) –2/29 ordinátájú pontjának koordinátáit! |
| 88. | Határozzuk meg a 6x+11y=132 egyenletű egyenes  a.) egy irányvektorát d.) x tengellyel alkotott metszéspontját  b.) egy normálvektorát e.) a tengellyel alkotott metszéspontját  c.) irányszögét f.) a tengelyekkel alkotott háromszög kerületét és területét! |
| 88.H | Határozzuk meg az e: y = 2x+9, az f: 5x + 7y = 144; a g: 30x – 4y = 17 és a h: 5y–2x+9=0 egyenletű egyenes  a.) irányszögét d.) x tengellyel alkotott metszéspontját  b.) egy irányvektorát e.) a tengellyel alkotott metszéspontját  c.) egy normálvektorát f.) a tengelyekkel alkotott háromszög kerületét és területét! |
| 89. | Egy háromszög csúcsai A(1; 1); B(7; 2) és C(4; –4). Határozzuk meg az oldalegyenesek egyenletét! |
| 89.H | Határozzuk meg az oldalegyenesek egyenletét, ha a háromszög csúcsai:  a.) A(6; 9); B(1; 0) és C(5; –3). b.) A(3; 4); B(4; 3); C(1; 1)  c.) A(–3; 9); B(9; 3); C(3; –9) d.) A(2; –1); B(3; 5); C(9; 10) |
| 90. | Egy háromszög csúcsai A(1; 1), B(7; 2) és C(4; –4). Határozzuk meg a magasságegyenesek egyenletét! |
| 90.H | Határozzuk meg a magasságegyenesek egyenletét, ha a háromszög három csúcsa:  a.) A(3; 8); B(1; –2); C(7; 4) b.) A(1; 1); B(–1; 1); C(1; –1)  c.) A(3; –4); B(5; 0); C(–2; 10) d.) A(√2; 1); B(2; –√2); C(0; 0) |
| 91. | Egy háromszög csúcsai A(1; 1), B(7; 2) és C(4; –4). Határozzuk meg súlyvonalak egyeneseinek egyenletét! |
| 91.H | Határozzuk meg a súlyvonalak egyeneseinek egyenletét, ha a háromszög három csúcsa:  a.) A(3; 8); B(1; –2); C(7; 4) b.) A(1; 1); B(–1; 1); C(1; –1)  c.) A(3; –4); B(5; 0); C(–7; 10) d.) A(√3; 1); B(3; –√3); C(0; 0) |
| 92. | Egy háromszög csúcsai A(1; 1), B(7; 2) és C(4; –4). Határozzuk meg a szakaszfelező merőlegesek egyenletét! |
| 92.H | Határozzuk meg a szakaszfelező merőlegesek egyenletét, ha a háromszög három csúcsa:  a.) A(3; 8); B(1; –2); C(7; 4) b.) A(1; 1); B(–1; 1); C(1; –1)  c.) A(3; –4); B(5; 0); C(–7; 10) d.) A(√3; 1); B(3; –√3); C(0; 0) |
| 93. | Határozzuk meg az 5x + 11y = 7 és az x – 4y = 1 egyenesek metszéspontját! |
| 93.H | Határozzuk meg a következő egyenesek metszéspontját!  a.) e: x=2 és f: y=4 e.) e: x–2=2y és f: y–3=3x  b.) e: x+y=3 és f: x–y=2 f.) e: x/2–y/3=10 és f: x/4+y/5=27  c.) e: 2x+3y=5 és f: 7x–11y=–4 g.) e: 3,3x+2,1y=8,7 és f: –1,9x+4,1y=0,3  d.) e: 4x+7y=1 és f: 3x–9y=15 h.) e: –x–y–1=0 és x+y+1=0 |
| 94. | Adjuk meg az x+y=6 és az 5x–2y=–5 egyenletű egyenesek metszéspontján, valamint a P(3; 4) ponton áthaladó egyenes egyenletét! |
| 94.H | a.) Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely áthalad a W(1; 1) ponton, valamint az e: 2x–y = 2 és az f: x – 5y = –17 egyenesek metszéspontján!  b.) Határozzuk meg a (7; 1) ponton és az e: 3x + 5y = 16 valamint az f: –x + 6y = 10 egyenletű egyenesek metszéspontján áthaladó egyenes egyenletét! |
| 95. | Határozzuk meg az *e*: 3x + 4y = 11 egyenletű egyenes és a *P*(1; –2) pont távolságát! |
| 95.H | Határozzuk meg az *f*: –x + 2y = 20 egyenletű egyenes és a következő pontok távolságát!  *A*(1; 0); *B*(–2; 5) *C*(2; –6); *D*(2; 11)  **f: x – 2y + 20 = 0.; d(f; A) = (1 – 0 + 20)/√5 = 21/√5 = 9,391; d(f; B) = (–2 – 10 + 20)/√5 = 8/√5 = 3,578.**  **d(f; C) = (2 + 12 + 20)/√5 = 34/√5 = 15,21; d(f; D) = (2 – 22 + 20)/√5 = 0.** |
| 96. | Határozzuk meg az alábbi két egyenes távolságát!  *e*: 2x – 5y = 11; *f*: 2x – 5y = –2. |
| 96.H | Határozzuk meg az *e* és az *f* egyenesek távolságát, ha  a.) *e*: x + y = –34 *f*: x + y = –19  b.) *e*: –8x + 15y = 43 *f*: 8x – 15y = 77  c.) *e*: 6x + 5y = 4 *f*: 6x + 4y = 5  d.) *e*: y = 31 *f*: y = 12  e.) *e*: x + √3∙y = 2 *f*: x + √3∙y = –14 |
| 97. | Keressük meg az y = 3 egyenesen azt a pontot, amely a √2∙x + √7∙y = 2 egyenletű egyenestől 8 egység távolságra van! |
| 97.H | a.) Keressük meg azt az x = 5 abszcisszájú pontot, amely a 3x + 4y = 10 egyenletű egyenestől 2 egység távolságra van!  b.) Keressük meg azt a pontot, amely rajta van az y = –1 egyenletű egyenesen, és az x – 5y = 19 egyenletű egyenestől √26 egység távolságra van!  c.) Keressük meg az x tengelyen azt a pontot, amely a √3∙x + √6∙y = √7 egyenletű egyenestől 10 egység távolságra van!  d.) Melyik az a pont, amely az x tengelytől 3 egység, az 5x + 12y = 2 egyenletű egyenestől pedig 4 egység távolságra van? |
| 98. | Írjuk fel az y = 0,75x + 2 egyenletű egyenestől 4 egység távolságban haladó egyenesek egyenleteit! |
| 98.H | Írjuk fel a 6x – 8y = –5 egyenletű egyenestől  a.) 1 ; b.) 2; c.) 10; d.) 16 egység távolságban haladó egyenesek egyenletét!  Írjuk fel az x + 5y = 11 egyenletű egyenestől  e.) 2; f.) 5; g.) √37; h.) 2√37 egység távolságban haladó egyenesek egyenletét! |
| 99. | Határozzuk meg az x + 2y = 3 és az x + 2y = 11 egyenletű egyenesek távolságát! |
| 99.H | Határozzuk meg a következő egyenesek távolságát!  a.) e: 3x + 4y = 9; f: 3x + 4y = 10  b.) e: 9x – y = –4; f: 9x – y = 2  c.) e: x + 3y = 4 + √10 f: x + 3y = 4 – 3√10  d.) e: 4x – 3y = √2 f: 3y – 4x = √32 |
| 100. | Írjuk fel az *e* és *f* egyenesek szögfelezőinek egyenletét!  e: x + y = 10 f: 7x + y = –8 |
| 100.H | Írjuk fel az *e* és *f* egyenesek szögfelezőinek egyenletét!  a.) e: 4x + 9y = 2 f: 9x + 4y = 8  b.) e: 2x + 3y = 5 f: 3x – 2y = –9  c.) e: x + 2y = 8 f: x – y = 7  d.) e: x + √8∙y = 6 f: x – √3∙y = –1 |
| 101. | Határozzuk meg az ABC háromszög beírt körének középpontját, a beírt kör sugarát, valamint a körnek az oldalakkal közös pontjait! A(2; –3); B(9; –2); C(3; 4). |
| 101.H | Határozzuk meg az ABC háromszög beírt körének középpontját, a beírt kör sugarát, valamint a körnek az oldalakkal közös pontjait!  a.) A(0; –1); B(7/4; 3/4); C(7; 0);  b.) A(–9; –3); B(–2; 4); C(19; 1);  c.) A(–2; 3); B(5; –1/2); C(2; –11). |

Háromszög-számítós gyakorló feladatok

A következőkben néhány háromszög adatait adjuk meg. A gyakorlás mikéntje: három (alább ajánlott) adatot tekintsünk ismertnek, és számítsuk ki az összes többit a tanult módon. Az eredményt a megadott adatok alapján ellenőrizni tudjuk.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 102. | A(4; 0)  B(–5; –3)  C(2;4) | a: x–y=–2  b: 2x+y=8  c: x–3y=4 | FBC(–3/2; 1/2)  FAC(3; 2)  FAB (–1/2; –3/2) | fBC: x+y=–1  fAC: x–2y=–1  fAB: 3x+y=–3 | ma: x+y=4  mb: x–2y=1  mc: 3x+y=10 | sa: x+11y=4  sb: 5x–8y=–1  sc: 11x–5y=2 | O(–1; 0)  S(1/3; 1/3)  M(3; 1). |
| 103. | A(3; 3)  B(2; 10)  C(–1; 1) | a: 3x–y = –4  b: x–2y = –3  c: 7x+y = 24 | FBC(0,5; 5,5)  FAC(1; 2)  FAB(2,5; 6,5) | fBC: x+3y = 17  fAC: 2x+y = 4  fAB: x–7y = –43 | ma: x+3y = 12  mb: 2x+y = 14  mc: x–7y = –8 | sa: x+y = 6  sb: 8x–y = 6  sc:11x–7y = –18 | O(–1; 6)  S(4/3; 14/3)  M(6; 2) |
| 104. | A(0; 4)  B(–5; 3)  C(1; –1) | a: 2x+3y = –1  b: 5x+y = 4  c: x–5y = –20 | FBC(–2; 1)  FAC(1/2; 3/2)  FAB(–5/2; 7/2) | fBC: 3x–2y = –8  fAC: x–5y = –7  fAB: 5x+y = –9 | ma: 3x–2y = –8  mb: x–5y = –20  mc: 5x+y = 4 | sa: 3x–2y = –8  sb: 3x+11y = 18  sc:9x+7y = 2 | O(–2; 1)  S(–4/3; 2)  M(0; 4) |

a.) Adott A; B; C. b.) Adott a; b; c. c.) Adott A; B; S d.) Adott A; FBC; FAC e.) Adott a három felezőpont

f.) Adott A; FAB; S g.) Adott A; FBC; S h.) Adott a; b; S. Jó munkát!

**Egyenes – a felelés kérdései**

1. Mit értünk az egyenes egy irányvektorán vagy normálvektorán?

*2. Az egyenes paraméteres vektoregyenlete*

*3. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere*

*4. Az egyenes irányvektoros egyenlete*

*5. Az egyenes normálvektoros egyenlete*

*6. Az egyenes iránytényezős egyenlete*

*7. Az egyenes tengelymetszetes egyenlete*

8. Két ponton átmenő egyenes egyenletének meghatározása (lépések)

9. A háromszög oldalfelező merőlegeseinek egyenlete (hogyan határozzuk meg ezeket a csúcsok ismeretében?)

10. A háromszög magasságegyeneseinek egyenlete

11. A háromszög súlyvonalainak egyenlete

12. A háromszög magasságpontjának meghatározása

13. A háromszög köré írt körének középpontját hogyan határozhatjuk meg a koordináta-geometria eszközeivel?

*14. Pont és egyenes távolsága*

15. Két egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban

*16. A szögfelezők egyenlete; hogyan dönthető el, hogy melyik melyik?*

17. A háromszög beírt körének középpontját hogyan határozhatjuk meg a koordináta-geometria eszközeivel?

*18. Szakasz m:n arányú osztópontjának koordinátái*

*19. A négyszögek osztályozása oldalaik párhuzamossága, egyenlősége ill. átlóik szép tulajdonságai alapján*

*20. A nevezetes szögek (0º; 30º; 45º; 60º; 90º) szögfüggvényei*

Jó felkészülést! Ezúttal minden kérdésnél szükséges a levezetés. A kérdéseket a felelésre ki kell dolgozni! A *dőlt betűvel szedett kérdések* esetén a levezetés mellett az eredményt is azonnal tudni kell!

A kör egyenlete – begyakorló feladatok

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 111. | Egy kör egyenlete: (x+2)2 + (y–3)2 = 40. Határozzuk meg a kör sugarát és a középpont összetevőit! | | |
| 111 H | Határozzuk meg a kör sugarát és a középpont összetevőit a következő körök esetében:  k1: (x–4)2 + (y+7)2 = 16; k2: (x+30)2 + (y–44)2 = 130; k3: (x+11)2 + (3–y)2 = 784. | | |
| 112. | Egy kör középpontja O(1; –3); sugara √8 egység. Írjuk fel az egyenletét! | | |
| 112.H | a.) Egy kör középpontja O(–2; 9); sugara 16 egység. Írjuk fel az egyenletét!  b.) Egy kör középpontja O(0; 8); sugara 11 egység. Írjuk fel az egyenletét!  c.) Egy kör középpontja az AB szakasz felezőpontja, sugara egyenlő az AB szakasz hosszával. Határozzuk meg a kör egyenletét, ha A(13; 19) és B(–11; 3)! | | |
| 113. | Írjuk fel a k: (x+5)2 + (y–1)2 = 17 egyenletű kör x = –4 abszcisszájú pontjainak koordinátáit! | | |
| 113.H | a.) Írjuk fel a k1: x2 + (y+2)2 = 13 egyenletű kör y = –1 ordinátájú pontjainak koordinátáit!  b.) Írjuk fel a k2: (x–6)2 + (y–10)2 = 10 egyenletű kör x = 7 abszcisszájú pontjainak összetevőit!  c.) Határozzuk meg a k3: (x–7)2 + y2 = 11 egyenletű kör y = –4 ordinátájú pontjainak összetevőit! | | |
| 114. | Írjuk fel a lentebb megadott köröknek az y = 3 ordinátájú pontjainak koordinátáit!  a.) (x–4)2 + (y+1)2 = 10 b.) (x+10)2 + (y–3)2 = 4 c.) (x–2)2 + (y–2)2 = 9 | | |
| 114.H | Írjuk fel a lentebb megadott köröknek az x=–7 abszcisszájú pontjainak koordinátáit!  a.) (x+5)2 + (y+1)2 = 12 b.) (x+7)2 + (y–3)2 = 9 c.) (x–2)2 + (y–2)2 = 9  d.) (x+√2)2 + (y–√3)2 = 53 e.) x2 + y2 = 625 f.) (x+5/2)2 + (y–11/2)2 = 420,25 | | |
| 115. | Határozzuk meg a következő körök sugarát és középpontjának összetevőit!  a.) x2 + y2 + 2y – 3 = 0 b.) x2 +y2 – 6x + 2y – 15 = 0 c.) x2 + y2 + x – 9y – 4,5 = 0 | | |
| 115.H | Határozzuk meg a következő körök sugarát és középpontjának összetevőit!  a.) x2 + y2 + 10x = 0 b.) x2 +y2 – 4x + 2y – 5 = 0 c.) x2 + y2 – 14x – 12y + 4= 0;  d.) x2 + y2 – 18y + 17 = 0 e.) x2 + y2 + 4x + 6y + 4 = 0 f.) 2x2 + 2y2 + 2x + 2y + 1 = 0;  g.) x2 + y2 – 8x – 4y = 3 h.) x2 + y2 + 3x – 7y – 1,5 = 0 i.) x2 + y2 – 11x – 13y + 120,5 = 0 | | |
| 116. | Írjuk fel az x2 + y2 – 2x + 8y + 16 = 0 egyenletű kör x = 0 abszcisszájú pontjainak koordinátáit! | | |
| 116.H | a.) Írjuk fel az x2 + y2 – 6x – 16y – 12 = 0 egyenletű kör y = –1 ordinátájú pontjainak összetevőit!  b.) Írjuk fel az x2 + y2 – 7x – 8y + 21 = 0 egyenletű kör x = 1 abszcisszájú pontjainak összetevőit!  c.) Írjuk fel az x2 + y2 – x + 9y – 11 = 0 egyenletű kör y = –2 ordinátájú pontjainak összetevőit! | | |
| 117. | Egy kör középpontja az origó, a körvonal egy pontja a P(4; –7) pont. Írjuk fel a kör egyenletét! | | |
| 117.H | a.) Egy kör középpontja az origó, a körvonal egy pontja a P(3; 4). Írjuk fel a kör egyenletét!  b.) Egy kör középpontja az origó, a körvonal egyik pontja Q(6; –11). Írjuk fel a kör egyenletét!  c.) Egy kör középpontja az origó, a körvonal áthalad az y = 2x+1 és a 3x – y = 10 egyenletű egyenesek metszéspontján. Írjuk fel az egyenletét! | | |
| 118. | Egy kör középpontja az O(2; 3); a körvonal egy pontja: P(5; 6). Írjuk fel a kör egyenletét! | | |
| 118.H | a.) Egy kör középpontja O(–3; –5); a kör egy pontja P(2; 3). Írjuk fel a kör egyenletét!  b.) Egy kör középpontja O(–2; 7); a kör egy pontja P(10; –3). Írjuk fel a kör egyenletét!  c.) Egy kör középpontja az 5x + 2y = 10 egyenletű egyenes egyik tengellyel alkotott metszéspontja, a másik tengellyel alkotott közös pontja pedig rajta van a körvonalon. Adjuk meg a feltételeknek megfelelő körök egyenletét! | | |
| 119. | Egy kör középpontja rajta van az x tengelyen. A P1(3; 5) és P2(9; 5) pontok rajta vannak a körvonalon. Írjuk fel a kör egyenletét! | | |
| 119.H | a.) Egy kör középpontja rajta van az x tengelyen. A P1(–2; 3) és a P2(4; 3) pontok rajta vannak a körvonalon. Írjuk fel a kör egyenletét!  b.) Egy kör középpontja az y tengelyen van. A Q1(2; 3) és a Q2(4; 5) pontok rajta vannak a körvonalon. Írjuk fel a kör egyenletét!  c.) Egy kör középpontja valamelyik koordinátatengelyen van. A CD szakasz két harmadolópontja rajta van a körvonalon. Írjuk fel a kör egyenletét, ha C(–4; 19) és D(19; 5)! | | |
| 120. | Egy kör középpontja az O(4; 5); és tudjuk, hogy a kör érinti az x tengelyt. Írjuk fel az egyenletét! | | |
| 120.H | a.) Egy kör középpontja az O(7; –9) pont, és a kör érinti az y tengelyt. Írjuk fel az egyenletét!  b.) Egy kör középpontja az O(1; 2) pont és a kör érinti valamelyik tengelyt. Írjuk fel az egyenletét!  c.) Egy kör középpontja az ABC háromszög súlypontja, a kör érinti az x tengelyt. Írjuk fel az egyenletét, ha A(2; 8); B(4; –2) és C(–6; –9)! | | |
| 121. | Egy kör érinti mindkét koordinátatengelyt, és sugara √5 egység. Írjuk fel a kör egyenletét! | | |
| 121.H | a.) Egy kör érinti mindkét koordinátatengelyt, és sugara 7 egység. Írjuk fel az egyenletét!  b.) Egy kör érinti mindkét koordinátatengelyt és átmérője √80 egység. Írjuk fel az egyenletét!  c.) Egy kör érinti mindkét koordinátatengelyt és területe 441π egységnégyzet. Írjuk fel a kör egyenletét!  d.) Egy kör érinti mindkét koordinátatengelyt. Az érintési pontok és az origó által meghatározott háromszög kerülete 6 + 3√2 egység. Írjuk fel a kör egyenletét! | | |
| 122. | Egy kör sugara 6 egység, és az x tengelyt a 9 abszcisszájú pontjában érinti. Írjuk fel az egyenletét! | | |
| 122.H | a.) Egy kör sugara 2 egység és az y tengelyt a –5 ordinátájú pontjában érinti. Írjuk fel az egyenletét!  b.) Egy kör az x tengelyt a –6 abszcisszájú pontjában érinti. A kör kerülete 10π egység. Írjuk fel a kör egyenletét!  c.) Egy kör sugara 10 egység és az x tengelyt a 8 abszcisszájú pontjában érinti. Határozzuk meg a kör koordinátatengelyekkel alkotott közös pontjai által meghatározott háromszög kerületét és területét! | | |
| 123. | Egy kör érinti a koordinátatengelyeket és áthalad a P(4; 2) ponton. Írjuk fel az egyenletét! | | |
| 123.H | a.) Egy kör érinti a koordinátatengelyeket és áthalad a P(3–√10; √10–1) ponton. Írjuk fel az egyenletét!  b.) Egy kör érinti a koordinátatengelyeket és áthalad a D(1; –2) ponton. Írjuk fel az egyenletét!  c.) Egy kör érinti a koordinátatengelyeket és áthalad a K(–9; –1) ponton. Írjuk fel az egyenletét! | | |
| 124. | Egy kör áthalad a P(3; 6) és Q(5; 8) pontokon, középpontja az y = x + 11 egyenletű egyenesre esik. Írjuk fel a kör egyenletét! | | |
| 124.H | a.) Egy kör áthalad az A(–5; –1) és a B(–1; 1) pontokon, középpontja az y tengelyre esik. Írjuk fel az egyenletét!  b.) Egy kör áthalad az e: 3x – 4y = 48 egyenletű egyenes koordinátatengelyekre eső pontjain, középpontja pedig rajta van az f: 7x – 4y = 6 egyenletű egyenesen. Írjuk fel a kör egyenletét!  c.) Egy kör áthalad annak a rombusznak két szemközti csúcsán, amelynek a másik két szemközti csúcsa A(2; –7) és C(–6; –1), és amelynek az egyik átlója 12 egység. A kör középpontja rajta van az e: 2x+5y = 28 egyenletű egyenesen. Írjuk fel a kör egyenletét! | | |
| 125. | Határozzuk meg az x2 + y2 + 2x – 6y = 6 egyenletű körnek a koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjait! | | |
| 125.H | a.) Határozzuk meg az x2 + y2 – 10x – 4y = 4 egyenletű körnek a koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjait!  b.) Határozzuk meg az x2 + y2 + x + y + 1 = 0 egyenletű körnek a koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjait!  c.) Egy kör két pontja: A(–2; –1); B((1; –2). A kör középpontjának második összetevője: 3. Mely pontokban metszi ez a kör a koordinátatengelyeket? | | |
| 126. | Egy kör áthalad az A(0; 0); B(4; 4) és C(0; 4) pontokon. Írjuk fel az egyenletét! | | |
| 126.H | a.) Egy kör áthalad a P(3; 3); Q(10; 3) és R(10; –4) pontokon. Írjuk fel az egyenletét!  b.) Egy kör áthalad a P(–1; 7); Q(5; 7) és R(2; –2) pontokon. Írjuk fel az egyenletét!  c.) Egy kör áthalad az A(6; 10); B(6; –4); C(11; 8) pontokon. Írjuk fel az egyenletét! | | |
| 127. | Egy kör áthalad az A(1; 5); B(5; 3) és C(–10; –2) pontokon. Írjuk fel az egyenletét! | | |
| 127.H | a.) Egy kör áthalad az E(6; –1); F(7; –2) és G(4; –5) pontokon. Írjuk fel az egyenletét!  b.) Egy kör áthalad az X(–1; 1); az Y(–6; 4) és a Z(2; 4) pontokon. Írjuk fel az egyenletét!  c.) Egy kör áthalad az a, b, c egyenesek által meghatározott háromszög három csúcsán. Határozzuk meg a három csúcson átmenő kör egyenletét! Az egyenletek: a: x – y = –2; b: 3x + y = 2 és c: x + 2y = –8. | | |
| 128. | Adjuk meg a k: x2 + y2 – 2x + 4y = 0 egyenletű kör és az e: x+2y = 0 egyenletű egyenes metszéspontjainak összetevőit! | | |
| 128.H | Adjuk meg a *k* kör és az *e* egyenes metszéspontjainak összetevőit, ha  a.) *k*: x2 + y2 = 13 és *e*: x–y = 1; b.) *k*: x2 + y2 = 50 és *e*: x–3y = –10;  c.) *k:* x2 + y2 = 4 és *e*: y = 4 – x; d.) *k*: x2 + y2 = 25 és *e*: 3x + 4y = – 25;  e.) *k*: x2 + y2 = 8 és *e*: x + y = 13 f.) *k*: (x+2)2 + (y–3)2 = 17 és *e*: 3x+5y = –8. **M1(–1; –1); M2(–6;–2)** | | |
| 129. | Határozzuk meg a k1 és k2 körök metszéspontjait, ha k1: x2 + y2 = 5 és k2: (x–6)2 + (y–2)2 = 25. | | |
| 129.H | Határozzuk meg a k1 és k2 körök metszéspontjait, ha  a.) k1: x2 + y2 = 25 és k2: (x–3)2 + (y–3)2 = 13; b.) k1: x2 + y2 = 10 és k2: x2 + y2 – 6x – 2y –10 = 0;  c.) k1: x2 + y2 + 3x + 5y –0,5 = 0; k2: x – 10x + y2 – 14y + 73 = 0.  d.) k1: x2 + y2 = 20 és k2: (x–3)2 + (y+1)2 = 16 e.) k1: (x–1)2 + (y+3)2 = 50 és (x+1)2 + (y–1)2 = 10. | | |
| 130. | Határozzuk meg az AB szakasz Thálész-körének egyenletét, ha A(3; 6) és B(–1; –4)! | | |
| 130.H | a.) Határozzuk meg az EF szakasz Thálész-körének egyenletét, ha E(1; –5) és F(3; 3)!  b.) Írjuk fel a PQ szakasz Thalész-körének egyenletét, ha P(3; 5/2) és Q(–2; –10)!  c.) Egy CD szakasz egyik végpontja a C(4; 11) pont. A szakasz fölé szerkesztett Thalész-kör egyik pontja: P(7; 14). A Thalész-kör középpontjának abszcisszája 6. Írjuk fel a Thálész-kör egyenletét, valamint határozzuk meg a D pont összetevőit! | | |
| 131. | Egy szakasz végpontjai: A(3; 4) és B(11; –2). Határozzuk meg a szakasz 45-135 fokos látóköríveinek egyenletét! | | |
| 131 H | a.) Egy szakasz két végpontja: C(2; 5) és D(2; 11). Határozzuk meg mindazon pontok összetevőit, amelyekből a CD szakasz 45 fokos vagy 135 fokos szög alatt látszik!  b.) Egy szakasz két végpontja: G(0; 1) és H(–8; 5). Határozzuk meg a szakasz 45-135 fokos látóköríveinek egyenletét!  c.) Egy szakasz két végpontja: A(–1; 3) és B(3; 5). Határozzuk meg mindazon pontok összetevőit, amelyekből az AB szakasz ugyanakkora szög alatt látszik, mint a P(5; 1) pontból! | | |
| 132. | Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai: A(0; –2); B(6; 6). A derékszögű csúcs az e: y = x+4 egyenletű egyenesen van. Határozzuk meg a derékszögű csúcs összetevőit! | | |
| 132.H | a.) Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai: A(–6;1); B(12;5). A derékszögű csúcs az e: 2x+y = 12 egyenletű egyenesen van. Határozzuk meg a derékszögű csúcs összetevőit!  b.) Egy téglalap átlójának végpontjai: A(–3; –1); C(2; 4). A téglalap egyik csúcsának abszcisszája 3. Határozzuk meg a téglalap hiányzó csúcsainak összetevőit!  c.) Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai: A(3; 4); B(9; 2). A derékszögű csúcs az e: x + y = –3 egyenletű egyenesen van. Határozzuk meg a derékszögű csúcs összetevőit! | | |
| 133. | Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai: A(–3;0); B(11;2). A derékszögű csúcs a k: (x–1)2 + (y–5)2 = 25 egyenletű körön van. Határozzuk meg a derékszögű csúcs összetevőit! | | |
| 133.H | a.) Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai: A(–4;–3); B(2;5). A derékszögű csúcs a k: (x+3)2 + y2 = 20 egyenletű körön van. Határozzuk meg a derékszögű csúcs összetevőit!  b.) Egy téglalap egyik átlójának végpontjai: A(3; –5); C(8; 5). A téglalap egyik csúcsa az (x–1)2 + (y–6)2 = 50 egyenletű körön található. Határozzuk meg a téglalap kerületének lehetséges értékeit!  c.) Egy derékszögű háromszög átfogójának egyenese: x + 2y = 5. Az átfogó egyik végpontjának abszcisszája, a másiknak pedig az ordinátája éppen –1. A derékszögű csúcs rajta van a k: (x–3)2 + (y–4)2 = 5 egyenletű körön. Határozzuk meg a derékszögű csúcs összetevőit! | | |
| 134. | Adjuk meg az (x+4)2 + (y–2)2 = 10 egyenletű kört az x = –1 abszcisszájú pontjaiban érintő egyenesek egyenletét! | | |
| 134.H | a.) Adjuk meg az (x–5)2 + (y–1)2 = 25 egyenletű kört a P(9; 4) pontban érintő egyenes egyenletét!  b.) Határozzuk meg az (x+4)2 + (y–3)2 = 25 egyenletű körnek a tengelypontjaiban húzható érintőinek egyenletét!  c.) Adjuk meg az x2 + y2 = 40 egyenletű kört a 6 ordinátájú pontjaiban érintő egyenesek egyenletét! | | |
| 135. | Határozzuk meg az x2 + y2 = 10 egyenletű körhöz az A(–7; 1) pontból húzható érintők egyenletét! | | |
| 135.H | Határozzuk meg a *k* körhöz az *A* pontból húzható érintők egyenletét, ha  a.) *k*: x2 + y 2 = 13 és *A*(5; 1) b.) *k*: x2 + y2 = 5 és *A*(0; 5)  c.) *k*: (x+3)2 + (y–2)2 = 25 és *A*(–13; –3) d.) *k*: x2 + (y–7)2 = 32 és *A*(3; 3).  e.) Egy anyagi pont az (x+5)2 + (y–10)2 = 20 egyenletű körön mozog. Miután a körpályán tartó erő hirtelen megszűnik, a pont pályája áthalad az (1; 2) ponton. Melyik pontban hagyta el a mozgó pont a körpályát? | | |
| 136. | Határozzuk meg a *k1* és *k2* körök közös külső érintőinek egyenletét, ha *k1*: x2 + y2 = 5 és *k2*: (x–7)2 + (y–1)2 = 20! | | |
| 136.H | Határozzuk meg a *k1* és *k2* körök közös külső érintőinek egyenletét, ha  a.) *k1*: x2 + y2 = 20 és *k2*: (x–5)2 + (y–5)2 = 5!  b.) *k1*: (x–1)2 + (y+3)2 = 52 és *k2*: x2 + y2 + 10x + 14y – 3 = 0  c.) *k1*: x2 + y2 + 4x – 6y + 8 = 0 és *k2*: x2 + y2 + 8x + 6y – 20 = 0. | | |
| 137. | Határozzuk meg a k1 és k2 körök közös belső érintőinek egyenletét, ha k1: x2 + y2 = 2 és k2: (x–9)2 + (y–3)2 = 8! | | |
| 137.H | Határozzuk meg a k1 és k2 körök közös belső érintőinek egyenletét!  a.) *k1*: x2 + y2 = 45 és *k2*: (x+10)2 + (y+5)2 = 5; b.) k1: (x–3)2 + (y–5)2 = 1 és k2: (x+1)2 + (y–3)2 = 9;  Határozzuk meg a következő körök összes közös érintőjének egyenletét!  c.) k1: (x+1)2 + (y+4)2 = 1 és k2: (x–3)2 + (y+2)2 = 9; d.) x2 + y2 – 8x = 0 és x2 + y2 – 8y = 0. | | |
| 138. | Adott az x2 + y2 – 2x + 6y – 15 = 0 egyenletű kör és a 3x + 4y = 13 egyenletű egyenes. Határozzuk meg az adott körnek az adott egyenessel párhuzamos érintőinek egyenletét! | | |
| 138.H | a.) Adott az x2 + y2 – 14x + 4y – 66 = 0 egyenletű kör és a 2x– 3y = 1 egyenletű egyenes. Határozzuk meg az adott körnek az adott egyenessel párhuzamos érintőinek egyenletét!  b.) Határozzuk meg az x2 + y2 = 10 egyenletű körnek az x + 3y = 39 egyenletű egyenessel párhuzamos érintőinek egyenletét!  c.) Adjuk meg az origón és a (0; 6) ponton áthaladó 5 egység sugarú körnek az 3x – 4y = 112 egyenletű egyenessel párhuzamos érintőinek egyenletét! | | |
| 139. | a.) Adott az (x+2)2 + (y–3)2 = 10 egyenletű kör és az x + 3y = 21 egyenletű egyenes. Határozzuk meg az adott körnek az adott egyenesre merőleges érintőinek egyenletét!  b.) Határozzuk meg az (x–1)2 + y2 = 17 egyenletű körnek az 4x – y = –18 egyenletű egyenesre merőleges érintőinek egyenletét!  c.) Határozzuk meg az AB szakasz Thálész-körének a BC egyenesre merőleges érintőinek egyenletét, ha A(2; 10); B(–4; 2) és C(–3; 3)! | | |
| 139.H | Adott az (x–5)2 + (x–9)2 = 2 egyenletű kör és a 7x – y = 9 egyenletű egyenes. Határozzuk meg az adott körnek az adott egyenesre merőleges érintőinek egyenletét! | | |
| 140. | Legyen A(4;5); B(6; 8) és C(10; –1). Határozzuk meg az ABC háromszög köré írt körének egyenletét! | | |
| 140.H | a.) Legyen A(0;–3); B(–2;1) és C(4;9). Határozzuk meg az ABC háromszög köré írt körének egyenletét  b.) Legyen A(10; 1); B(2; –1) és C(–14; 5). Határozzuk meg az ABC háromszög köré írt körének egyenletét  c.) Egy háromszögben S(0; 4/3); M(–4; 6) és A(–3; –1). Határozzuk meg a háromszög köré írt körének egyenletét! | | |
| 141. | Legyen A(0;0); B(3;3) és C(7;–1). Határozzuk meg az ABC háromszög beírt körének egyenletét! | | |
| 141.H | a.) Legyen A(4;7); B(7; 3) és C(7;7). Határozzuk meg az ABC háromszög beírt körének egyenletét!  b.) Egy háromszögben A(5; –10); B(8; 4); C(4; 4). Határozzuk meg a háromszög beírt körének egyenletét!  c.) Egy háromszögben A(3; 7); B(11; –1); C(4; 0). Határozzuk meg a háromszög beírt körének egyenletét! | | |
| 142. | Legyen A(–3;1); B(0;4) és C(4;0). Határozzuk meg az ABC háromszög a oldalt érintő hozzáírt körének egyenletét! | | |
| 142.H | a.) Legyen A(–2;4); B(1;0) és C(–2;0). Határozzuk meg az ABC háromszög c oldalt érintő hozzáírt körének egyenletét!  b.) Egy háromszögben A(1; –5); B(–7; 3); C(0; 2). Határozzuk meg a háromszög hozzáírt köreinek egyenletét!  c.) Egy háromszögben A(0, 0); B(4; 0); C(0; 4). Határozzuk meg a háromszög hozzáírt köreinek egyenletét! | | |
| 143. | Legyen A(–4;2); B(0;14) és C(8;–10). Határozzuk meg az ABC háromszög Feuerbach-körének egyenletét! | | |
| 143.H | a.) Legyen A(4;–1); B(10;–1) és C(4;7). Határozzuk meg az ABC háromszög Feuerbach-körének egyenletét!  b.) Legyen A(2; 6); B(5; 8) és C(–4; 12). Határozzuk meg az ABC háromszög Feuerbach-körének egyenletét!  c.) Legyen A(10; 1); B(2; –1) és C(–14; 5). Adjuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjain! | | |
| 144. | A háromszög köré írt körének egyenlete (x–3)2 + (y–6)2 = 25, az AB oldalának felezőpontja FAB(1; 2), a C csúcshoz tartozó magasság talppontja TC(5; 0). Határozzuk meg a háromszög csúcsainak összetevőit! | | |
| 144.H | A háromszög köré írt körének egyenlete x2 + (y–4)2 = 10, a BC oldalának felezőpontja FBC(1; 2), az sa súlyvonala 5 egység hosszú. Határozzuk meg a háromszög csúcsainak összetevőit! | | |
| 151. | | Egy parabola tengelypontja az origó, fókuszpontja F. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha  a.) F(0; –3) b.) F(0 ;90) c.) F(2; 0) d.) F(–6; 0). | |
| 151 H | | Egy parabola tengelypontja az origó, fókuszpontja F. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha  e.) F(0; 5) f.) F(0; –4) g.) F(20; 0) h.) F(–8; 0). | |
| 152. | | Egy parabola tengelypontja C, fókuszpontja F. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha  a.) C(1; 0) és F(4; 0) b.) C(3; 0) és F(3; 8) c.) C(4; 2) és F(0; 2) d.) C(–3; 1) és F(–3; –5). | |
| 152.H | | Egy parabola tengelypontja C, fókuszpontja F. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha  e.) C(6; 2) és F(6; 0) f.) C(5; 1) és F(5; 9) g.) C(–4; 6) és F(–4; –2) h.) C(–3; 1) és F(3; 1). | |
| 153. | | Adott a parabola egyenlete. Határozzuk meg a paraméterét, tengelypontját, fókuszpontját és a vezéregyenes egyenletét!  a.) (y–3)= 0,25(x+1)2 b.) 6⋅(y+2) = –(x–2)2 c.) 8⋅(x–9) = (6–y)2 d.) –3x = (y+1)2+6 | |
| 153.H | | Adott a parabola egyenlete. Határozzuk meg a paraméterét, tengelypontját, fókuszpontját és a vezéregyenes egyenletét!  e.) (y–5)= 0,1(x+9)2 f.) (y+2)2 = –2(x–2) g.) 5⋅(x–1) = (2+y)2 h.) –y = (x+1)2+8 | |
| 154. | | Adott a parabola egyenlete. Határozzuk meg a paraméterét, tengelypontját, fókuszpontját, a vezéregyenes és a szimmetria-tengely egyenletét!  a.) y = x2 + 2x – 3 b.) 4y2 – 8y + x + 9 = 0 c.) (x+y)2 + 3 = (x–3y)2 d.) 16x = y2 + 10y + 21 | |
| 154.H | | Adott a parabola egyenlete. Határozzuk meg a paraméterét, tengelypontját, fókuszpontját, a vezéregyenes és a szimmetria-tengely egyenletét!  e.) y = 4x + 2 – x2 f.) 0 = x2 – 6x – 12y g.) (x+y)2 = (x–2y)2 h.) 8y + 2x = 1 + y2 | |
| 155. | | Adott a parabolának egy P pontja és C tengelypontja. Határozzuk meg a parabola egyenletét, ha a tengelye4 párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel!  a.) P(0; 0) és C(2; 1) b.) P(3; 1) és C(–1; 2) c.) P(–1/3; 3/4) és C(10; 0) d.) P(2; 7) és C(–1; 7). | |
| 155.H | | Adott a parabolának egy P pontja és C tengelypontja. Határozzuk meg a parabola egyenletét, ha a tengelye párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel!  a.) P(3; 2) és C(0; 1) b.) P(5; 2) és C(–1; 8) c.) P(5/2; 3/2) és C(4; 1) d.) P(4; 3) és C(4;–2). | |
| 156. | | Határozzuk meg az x2 + 2x + y = 4 egyenletű parabola 3 ordinátájú pontjainak összetevőit! | |
| 156.H | | a.) Határozzuk meg az y + 5 = (x+2)2/24 egyenletű parabola 19 ordinátájú pontjainak összetevőit!  b.) Adjuk meg a 6x + y2 – 2y = 2 egyenletű parabola 8 abszcisszájú pontjainak összetevőit!  c.) Adjuk meg az x2 + y + 13 = 0 egyenletű parabola –12 ordinátájú pontjainak összetevőit! | |
| 157. | | Milyen görbén helyezkednek el azon körök középpontjai, amelyek átmennek a (2; 4) ponton és érintik az abszcisszatengelyt? | |
| 157.H | | a.) Milyen görbén helyezkednek el azon körök középpontjai, amelyek átmennek a (–3; 8) ponton és érintik az abszcisszatengelyt?  b.) Milyen görbén helyezkednek el azon körök középpontjai, amelyek áthaladnak a (12; 10) ponton és érintik az ordinátatengelyt?  c.) Milyen görbén helyezkednek el azon körök középpontjai, amelyek áthaladnak az origón és érintik az y = –10 egyenletű egyenest? | |
| 158. | | Írjuk fel annak a parabolának a tengelyponti egyenletét, amelyik áthalad a (–5; 6); a (–1; 2) és az (1; 3) pontokon, és tengelye párhuzamos az y tengellyel! | |
| 158.H | | Írjuk fel annak a parabolának a tengelyponti egyenletét, amely áthalad a (0; 0); a (–1; 1) és a (4; 4) pontokon, és tengelye párhuzamos az a.) x tengellyel; b.) y tengellyel!  c.) Egy parabola áthalad az E(1; 1); az F(–4; –9) és a G(4; –5) pontokon, tengelye párhuzamos az x tengellyel. Írjuk fel a parabola tengelyponti egyenletét!  d.) Egy parabola tengelye párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel. A parabola áthalad a (0; 1), a (4; 1) és a (6; 7) pontokon. Határozzuk meg a parabola paraméterét és tengelypontjának összetevőit!  e.) Egy parabola tükörtengelye az x = 2 egyenletű egyenes. A parabola két pontja: (4; 7) és (–2; –2). Írjuk fel a vezéregyenes egyenletét! (BEADANDÓ!) | |
| 159. | | Határozzuk meg az x2 + 3x + y = 15 egyenletű parabola és a 2x – 5y + 21 = 0 egyenletű egyenes metszéspontjait! | |
| 159.H | | a.) Adjuk meg az y = 2x – 3 egyenletű egyenes és az (y–5)2 = 4∙(x+2) egyenletű parabola metszéspontjainak összetevőit!  b.) Mely pontokban metszi egymást az x – 3y = –5 egyenletű egyenes és az (x+1) = 2∙(y–2)2. egyenletű parabola?  c.) Egy parabola tengelye y irányú, a görbe áthalad a (–6; 4), az (–3; 5) és a (3; –4) pontokon. Egy egyenes pedig áthalad a P(–5; 7) és a Q(3; –1) pontokon. Határozzuk meg a parabola és az egyenes metszéspontjainak összetevőit! | |
| 160. | | Milyen helyzetű egymáshoz képest a k kör és a π parabola? Adjuk meg a közös pontok összetevőit is!  a.) k: x2 + y2 = 17 és π: (x–3)2 = y b.) π: 4y = x2 és k: x2 + (y–3)2 = 8  c.) k: x2 + (y–4)2 = 16 és π: 4y = –x2 d.) π: y+10 = 0,1∙(x–3)2 és k: x2 + y2 – 6x + 8 = 0  e.) k: x2 + y2 – 8x + 7 = 0 és π: x + y2 = 0 f.) k: x2 + (y–4)2 = 16 és π: 4y = x2 | |
| 160.H | | Milyen helyzetű egymáshoz képest a k kör és a π parabola? Adjuk meg a közös pontok összetevőit is!  g.) k: x2 + (y–7)2 = 40 és π: 4y = x2; h.) π: 4(x–2) = (y–3)2 és k: (x+2)2 + (y–3)2 = 15  i.) π: 2y = –x2 és k: x2 + (y+9)2 = 17; j.) π: 9(x+3) = –(y+6)2 és k: (x+1)2 + (y+6)2 = 4  k.) k: x2 + y2 = 1 és π: x+1 = y2 l.) k: x2 + y2 = 25 és 16x = –3y2  m.) k: x2 + y2 = 6x és π: x2 – 6x – 4y = 0 n.) π: 16x + y2 – 4y = 44 és k: x2 + y2 + 2x – 4y = 11 | |
| 161. | | Írja fel a 4y = x2 egyenletű parabola azon húrjának egyenletét, amelyet a (2; 5) pont felez! | |
| 161.H | | a.) Írjuk fel a 9x = –2y2 egyenletű parabola azon húrjának egyenletét, amelyet a (–5, 3/2) pont felez!  b.) Egy parabola egyenlete: y = 3x2. Egy húrjának felezőpontja éppen a (–1; 15) pont. Milyen hosszú a húr? | |
| 162. | | Határozzuk meg az y = x2 egyenletű parabolát a 3 abszcisszájú pontjában érintő egyenes egyenletét! | |
| 162.H | | a.) Mekkora a meredeksége a 6x = y2 parabolának az y = –3 ordinátájú pontjában? (Segítség: egy görbe adott pontbeli meredeksége alatt az adott pontban a görbéhez húzható érintő meredekségét értjük, ha ez egyértelműen létezik.)  b.) Határozzuk meg a 2y = –x2 parabolának az y = –8 ordinátájú pontjaiban húzható érintők egyenletét!  c.) Számítsuk ki az y = x2 parabola 0; 1; 2; 4; 6; 9 abszcisszájú pontjaihoz tartozó érintőinek meredekségét! | |
| 163. | | Határozzuk meg a 8x = y2 egyenletű parabolát érintő, a (–3; 1) ponton áthaladó egyenes egyenletét, valamint az érintési pontok összetevőit! | |
| 163.H | | a.) Húzzunk érintőket a (0; –5) pontból az 0 = x2–4x–4y–4 egyenletű parabolához! Adjuk meg az érintők egyenletét és az érintési pontok összetevőit!  b.) Húzzunk érintőket a P(2; 4) pontból az x + 2 = –(y–3)2 egyenletű parabolához! Adjuk meg az érintők egyenletét és az érintési pontok összetevőit! | |
| 164. | | Határozzuk meg a 16(y–1) = (x–3)2 egyenletű parabola m = 2 meredekségű érintőjének egyenletét! | |
| 164.H | | a.) Adjuk meg az x = y2 egyenletű parabola m = –0,5 meredekségű érintőjének egyenletét!  b.) Határozzuk meg a 6y = –x2 egyenletű parabola m = 3 meredekségű érintőjének egyenletét!  c.) Egy parabola fókuszpontja a P(3; 1), vezéregyenesének egyenlete: x = 5. Határozzuk meg a parabola azon érintőjének egyenletét, amely merőleges a 3x – 2y = 19 egyenletű egyenesre! (BEADANDÓ!) | |
| 165. | | Mekkora sugarú lehet az a kör, amely az y = x2 parabolát annak tengelypontjában belülről érinti? | |
| 165.H | | a.) Mekkora sugarú lehet az a kör, amely a 6x = y2 parabolát annak tengelypontjában belülről érinti?  b.) Mekkora lehet a 2py = x2 egyenletű parabola paramétere, ha tudjuk, hogy van olyan kör, amelynek sugara 10 egység, és a parabolát annak tengelypontjában belülről érinti? | |
| 166. | | Milyen messze van a P(5; 0) pont az y = x2 egyenletű parabolától? | |
| 166.H | | a.) Milyen messze van az origó a 4x = (y–6)2 egyenletű parabolától?  b.) Milyen messze van a (0; 4) pont a 4y–4 = x2 egyenletű parabolától?  c.)\* Milyen messze van a P(5; –1) pont az y = x2 egyenletű parabolától? | |

A kör és a parabola – a felelés kérdései

1. A kör definíciója

**2. Az (u; v) középpontú és r sugarú kör egyenlete**

3. Az ax2 + by2 + cxy + dx + ey + f = 0 egyenlet milyen feltételek mellett határoz meg kört?

4. Kör és egyenes kölcsönös helyzete; metszéspontjaiknak kiszámítása

5. Körök viszonylagos helyzete; metszéspontjaiknak kiszámítása. Hová kell visszahelyettesíteni?

6. Kört adott pontjában érintő egyenes szerkesztése és egyenletének meghatározása

**7. Thálesz tétele és a tétel megfordítása**

8. Szakasz Thálész-körének megszerkesztése; egyenletének meghatározása

9. Körhöz külső pontból húzott érintők szerkesztése; egyenletüknek meghatározása

10. Két körhöz húzott közös külső és belső érintők szerkesztése; egyenletük meghatározása

11. A kör kerülete és területe

**12. A kör részeinek kerülete és területe (félkör, negyedkör, körcikk, körgyűrű, körszelet, körgyűrűcikk)**

**13. A kerületi és középponti szögek tétele**

14. A háromszög köré írható körének megszerkesztése; egyenletének meghatározása

15. A háromszög beírt körének megszerkesztése; egyenletének meghatározása

16. A parabola definíciója és részei

**17. Az origó tengelypontú, valamely tengelyirányú parabola egyenlete**

**18. Az (u; v) tengelypontú, valamely tengely irányú parabola egyenlete**

19. Az y = x2 függvény képének vizsgálata (miért parabola; hol a fókusz és a vezéregyenes, mekkora a paraméter?)

20. Parabola érintőjének fogalma, egyenletének meghatározása

A **vastagon szedett** tételek bizonyítását is tudni kell.

Jó felkészülést!